义务教育教科书（五·四学制）

数学

八年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社

义务教育教科书（五·四学制）

数学

八年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社

出版说明

为了更好地满足义务教育教学的需求，山东教育出版社等单位受山东省教育厅委托，以教育部审查通过的义务教育教科书为基础，改编出版了一套适合五四分段教学使用的义务教育教科书。本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》，配合山东教育出版社《义务教育教科书（五·四学制）·数学》（八年级下册）编写而成，供教师教学时参考使用。

本书力求体现义务教育课程标准精神和教科书的编写意图；从教师教学实际出发，既有利于教师更好地把握教科书的内容，解决备课中的实际困难，又留给教师一定独立发挥、独立钻研教科书的个性空间；根据素质教育的要求，在每一教学环节都注重体现对学生进行知识与能力、思想与方法、情感态度与价值观的培养；注意吸收数学教育教学的最新研究成果；符合五四分段教学实际，体现五四学制教育特色。

本书是在北京师范大学出版社出版的《义务教育教科书·数学教师教学用书》（九年级上册）的基础上改编而成的。参加本书改编的人员是韩际清、刘崇渭、王德刚、辛珍文、云鹏、陈杰、柳圣明、赵水祥，由马复、韩际清主编。

欢迎广大教师在使用过程中提出修改意见和建议，以利于本书的不断改进和完善。

山东教育出版社

目　录

第九章　图形的相似

注：括号内页码系教科书的页码.

第六章 特殊平行四边形

一、《标准》要求

1. 经历图形的抽象、分类、性质探讨的过程，掌握图形与几何的基础知识和基本技能.

2. 在参与观察、实验、猜想、证明等数学活动中，发展合情推理和演绎推理能力.

3. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

4. 理解平行四边形、矩形、菱形、正方形的概念，以及它们之间的关系.

5. 探索并证明矩形、菱形、正方形的性质定理：矩形的四个角都是直角，对角线相等；菱形的四条边相等，对角线互相垂直；以及它们的判定定理：三个角是直角的四边形是矩形，对角线相等的平行四边形是矩形；四条边都相等的四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形. 正方形具有矩形和菱形的一切性质.

二、教学目标

1. 经历菱形、矩形、正方形概念的抽象过程，以及它们的性质与判定的探索、猜测与证明的过程，丰富数学活动经验，进一步发展合情推理能力和演绎推理能力.

2. 理解菱形、矩形、正方形的概念，了解它们与平行四边形之间的关系，进一步体会从一般到特殊的思考问题的方法，增强发现问题和提出问题的能力.

3. 证明菱形、矩形、正方形的性质定理及判定定理，并能够证明其他相关结论.

4. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

5. 提高自主探究的能力和与他人合作交流的意识、方法.

三、设计思路

与八年级上册“平行四边形”一章类似，本章仍将采用探究与证明相结合的方式展开相关内容.

从内容上讲，在已经掌握了平行四边形的性质与判定的基础上，对菱形、矩形、正方形的有关性质与常用判定方法进行探索与证明，可以丰富对平行四边形的认识. 从方法上来看，本章从多角度引导学生探索菱形、矩形、正方形的有关性质和常用判定方法，并对探索得到的结论进行证明. 呈现形式上，教科书力求尽可能创设一些问题情境，为学生提供自主探索发现的空间，让学生经历“探索—发现—猜想—证明”的过程，使证明成为探索活动的自然延续和必要发展，进一步发展学生的合情推理能力与演绎推理能力.

此外，本章的学习还有助于深化学生对平行四边形的理解，以及对识图、画图等操作技能的掌握；有助于丰富学生的数学活动经验和体验，促进其良好数学观的形成.

具体地，本章设计了3节内容，分别探索并证明菱形的性质定理与判定定理、矩形

的性质定理与判定定理、正方形的性质定理与判定定理.对菱形、矩形，都设计了3个课时的内容：第1课时探索并证明图形的性质定理，第2课时探索并证明图形的判定定理，第3课时运用图形的性质定理与判定定理解决一些问题.由于正方形既是特殊的菱形，又是特殊的矩形，因此对它的性质与判定方法的研究过程则要简略一些，主要通过分析它与菱形、矩形的关系获得相关结论.

整章设计注意渗透归纳、类比、转化等数学思想；注意通过引导探索过程来渗透与展现证明的思路.此外，还注意引导学生探索证明的不同思路与方法，并进行适当的比较和讨论，提高学生分析、寻求证明思路的能力.如常常在一种证明结束后提出“你还有其他证明方法吗？与同伴进行交流”.

四、课时安排建议

1　菱形的性质与判定	3课时
2　矩形的性质与判定	3课时
3　正方形的性质与判定	2课时
回顾与思考	1课时

五、教学建议

1.让学生经历探索、猜测、证明的过程，体会合情推理与演绎推理各自的作用.

本章对菱形、矩形的性质与判定的研究，都需要学生先探索、猜想得到结论后再证明.教学中，教师既可以利用教科书上已有的素材，也可以根据实际情况创设更现实、更贴近学生的问题情境，引导学生进行相关的探索、猜测活动.例如，对矩形性质和判定条件的探索，既可以利用教科书上提供的“折纸活动”，也可以利用改变平行四边形邻边长短、角的大小的“活动框架”，还可以利用“几何画板”等软件制作课件.教师要充分调动学生的积极性与主动性，引导学生探索、发现结论，体会探索结论的各种方法，理解获得猜想后还应予以证明的意义，感受合情推理与演绎推理的关系.

2.注重合情推理与演绎推理的有机结合.

在前面的学习中，学生已初步掌握了几何证明的基本要求、基本步骤和基本方法.本章中的大部分结论都是先通过合情推理进行探索，再用演绎推理加以证明.在教学中，应把证明作为探索活动的自然延续与必要发展，让学生对发现的结论进行分析说明，然后按照几何证明的要求进行表达，实现合情推理与演绎推理的有机结合.同时，教师应注意通过一定的练习进一步发展学生的几何证明能力，但要避免过分追求证明题的数量与证明技巧，应依据《标准》和教科书的要求，把握证明的难度.

3.注重对证明思路的启发，提倡证明方法的多样性.

探索图形有关性质的过程，往往可以启发证明的思路.比如，教科书中设计了一个折纸活动用来探究菱形的性质，同时这一活动也对后续证明的思路与方法带来了一定启示.因此，在进行教学设计时，应充分考虑探索与证明的联系，为学生的积极思考创设条件.同时，

要鼓励学生大胆探寻新颖独特的证明思路和证明方法，提倡证明方法的多样性，并引导学生在与他人的交流中比较证明方法的异同，提高演绎推理能力.

4. 注意让学生感悟数学思想方法.

对菱形、矩形、正方形的性质与常用判别方法的探索与证明过程，蕴含着一些数学思想方法，如归纳、类比、转化等. 教学中应有意识地让学生感悟、领会这些思想方法，并应用于解决相关问题的过程中.

六、评价建议

1. 关注学生探索结论、分析证明思路和证明方法的过程.

让学生经历菱形、矩形、正方形的性质与常用判定方法的探索过程，这是本章的教学目标之一，而几何结论的证明思路和证明方法的获得也需要学生经历一个探索、分析的过程. 因此，考查学生在这些活动中的表现是评价的一个重要方面. 一方面要关注学生是否积极主动参与探索、分析活动，是否积极主动与同伴进行交流；另一方面要关注学生能否通过独立思考找到解决问题的办法或者获得证明的思路，能否使用规范的数学语言表达自己分析与思考的过程，能否尝试用不同的方法证明同一个命题.

2. 关注学生合情推理能力与演绎推理能力的发展水平.

本章采用探索与证明相结合的方式展开相关内容，这有利于发展学生的合情推理能力与演绎推理能力. 因此，学生的合情推理能力与演绎推理能力的发展水平也是评价的重要内容. 要关注学生能否利用适当的合情推理方法猜想出有关结论，能否从探索过程中获得证明思路和证明方法的启示，能否对常用的证明思路和证明方法进行归纳总结，是否掌握命题证明各环节的要求等. 另外，教师在评价学生推理能力的发展水平时，要注意个体差异，要关注学生个体的变化和自身水平的提高，及时对学生推理能力的发展给予鼓励.

主题图以城市一角为背景，包含有菱形、矩形和正方形图案，暗示本章的主要研究对象；文字说明简明扼要地揭示了菱形、矩形、正方形这些特殊的平行四边形与一般平行四边形的关系，概括了本章的主要学习任务.

第六章　特殊平行四边形

将平行四边形的边或角进行适当变化，就会得到一些特殊的平行四边形：菱形、矩形、正方形. 你知道它们有哪些特殊的性质吗？你对此有兴趣进行探究吗？你能证明这些特殊平行四边形的相关性质吗？

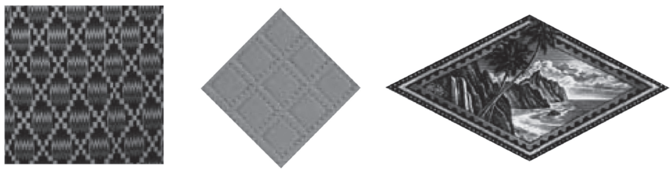
本章将对菱形、矩形、正方形进行更深入的认识，进一步丰富认识图形的经验.

学习目标

- 进一步获得对图形的性质进行探索、猜测和证明的经验
- 获得对菱形、矩形、正方形的基本认识
- 能够掌握综合法的证明方法
- 能证明菱形、矩形、正方形的性质定理和判定定理
- 体会菱形、矩形、正方形与平行四边形的关系
- 进一步理解一般与特殊的关系

1 菱形的性质与判定

[1] 观察下面几幅图片，我们不难发现其中包含一些平行四边形，但这些平行四边形又有哪些共同的特征呢？



一组邻边相等的平行四边形叫做**菱形**（rhombus）.

想一想

（1）菱形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为菱形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

做一做

用菱形纸片折一折，回答下列问题：

（1）菱形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？对称轴之间有什么位置关系？

（2）菱形中有哪些相等的线段？

[2] 通过上面的折纸活动，我们可以发现：菱形的四条边相等，对角线互相垂直. 下面我们证明这些结论.

教学目标

1. 理解菱形的概念，了解它与平行四边形之间的关系.

2. 经历菱形性质定理和判定定理的探索过程，进一步发展合情推理能力.

3. 能够用综合法证明菱形的性质定理和判定定理，进一步发展演绎推理能力.

4. 体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节安排3课时，第1课时是菱形性质定理的探索与证明，第2课时是菱形判定定理的探索与证明，第3课时是菱形性质定理和判定定理的综合应用. 当然，教学中也可以根据学生状况进行适当的调整.

[1] 教科书呈现的三幅图片中都含有菱形，其中第二幅图蕴含有正方形也是菱形的意图，第三幅图便于教学时通过测量比较，发现邻边相等的特征. 教学时也可以借助含有菱形的衣帽架、电动门，从观察变化中的不变性引入菱形的概念；还可以通过改变平行四边形一组邻边的长短，引导学生关注平行四边形形状的变化过程，从而引入菱形.

想一想

从菱形与平行四边形的关系入手，思考菱形的性质. 菱形是特殊的平行四边形，因此具有一般平行四边形的所有性质. 教科书首先让学生列举出这些性质，一方面是对平行四边形性质的回顾；另一方面在回顾这些性质的过程中，结合菱形的形状特征，学生有可能感悟到菱形的一些特殊性质，为接下来探索、证明菱形的特殊性质做好铺垫.

做一做

在上面“想一想”环节,学生可能已经感悟到菱形的某些特殊性质,这里通过折纸活动,让学生发现、验证菱形的特殊性质.

因为平行四边形是中心对称图形，因此菱形当然也是中心对称图形，所以这里不再提及.此外，菱形还是轴对称图形，菱形新增的性质本质上缘于其内在的轴对称性.

教学时应鼓励学生实际折一折，并在操作过程中进行观察与思考，从而获得有关结论.

（1）菱形是轴对称图形，有两条对称轴，两条对称轴互相垂直.

（2）菱形的四条边相等.

[2]通过上面的探索活动，发现了菱形的性质.其中的对称性只是通过合情推理加以认识，不证明；其他性质要进行严格的证明.

教学时，应鼓励学生先独立思考，自主分析证明思路，并与同学进行交流.在此基础上，由学生代表展示证明的书写过程，师生共同评议.

已知：如图 6-1，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：（1）$AB=BC=CD=AD$；（2）$AC\perp BD$.

证明：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$（菱形的对边相等）.

又 $\because AB=AD$，

$\therefore AB=BC=CD=AD$.

（2）$\because AB=AD$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰三角形.

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore OB=OD$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because OB=OD$，

$\therefore AO\perp BD$，

即 $AC\perp BD$.

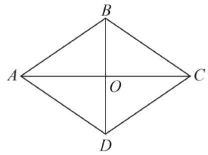


图 6-1

定理 菱形的四条边都相等.

定理 菱形的对角线互相垂直.

例 1 如图 6-2，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle BAD=60^\circ$，$BD=2$，求 AB 和 AC 的长.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD$（菱形的四条边都相等），

$AC\perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 2=1$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because \angle BAD=60^\circ$，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形.

$\therefore AB=BD=2$.

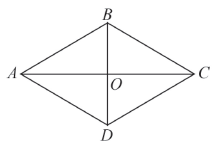


图 6-2

例 1

本例是利用菱形的性质求有关线段的长度. 教师要引导学生将推理的过程写清楚，不能只关注计算结果.

随堂练习

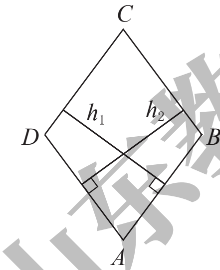
1. $BD = 6$ cm.

提示：根据菱形的对角线互相垂直，可知$\triangle AOB$是直角三角形；由勾股定理可求得$BO = 3$ cm；根据菱形的对角线互相平分，可知$BD = 2BO$.

2. 相等.

如图，四边形$ABCD$是菱形，AB，CD之间的距离为h_1，AD，BC之间的距离为h_2，由于

$S_{菱形ABCD} = AB \cdot h_1 = AD \cdot h_2$，$AB = AD$，所以$h_1 = h_2$.



习题6.1

1. 提示：根据菱形的四条边相等，可知$\triangle ABC$是等腰三角形；由$\angle BAD$与$\angle B$互补，$\angle BAD = 2\angle B$，可得$\angle B=60^\circ$.
2. 周长是 20.
3. 提示：分别证明$\triangle DAC \cong \triangle BAC$，$\triangle ABD \cong \triangle CBD$.
4. 有 4 个等腰三角形：$\triangle ABD$，$\triangle CBD$，$\triangle DAC$，$\triangle BAC$；

4 个直角三角形：$\triangle ABO$，$\triangle CBO$，$\triangle DAO$，$\triangle DCO$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得

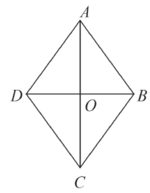
$$OA^2 + OB^2 = AB^2,$$

$$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\therefore AC = 2OA = 2\sqrt{3}.$$

随堂练习

1. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O. 已知$AB = 5$ cm，$AO = 4$ cm，求BD的长.
2. 菱形的两组对边的距离相等吗？为什么？

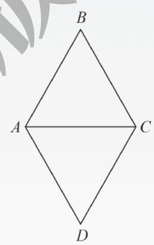


（第 1 题）

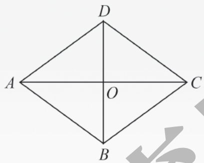
习题 6.1

知识技能

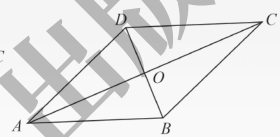
1. 已知：如图，在菱形$ABCD$中，$\angle BAD = 2\angle B$. 求证：$\triangle ABC$是等边三角形.
2. 如图，在菱形$ABCD$中，$BD = 6$，$AC = 8$，求菱形$ABCD$的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

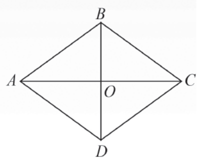


（第 3 题）

3. 已知：如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD相交于点O. 求证：AC平分$\angle BAD$和$\angle BCD$，BD平分$\angle ABC$和$\angle ADC$.

数学理解

4. 如图，在菱形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点O，图中有多少个等腰三角形和直角三角形？



（第 4 题）

根据菱形的定义，邻边相等的平行四边形是菱形．除此之外，你认为还有什么条件可以判断一个平行四边形是菱形？先想一想，再与同伴交流．[1]

平行四边形的不少性质定理与判定定理都是互逆命题．受此启发，我猜想：四边相等的平行四边形是菱形，对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

我觉得，对角线互相垂直的平行四边形有可能是菱形．但“四边相等的平行四边形是菱形”嘛……实际上与“邻边相等的平行四边形是菱形”一样．

你是怎么想的？你认为小明的想法如何？

已知：如图 6-3，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AC \perp BD$．

求证：$\square ABCD$ 是菱形．

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC$．

又 $\because AC \perp BD$，

$\therefore BD$ 所在的直线是线段 AC 的垂直平分线．

$\therefore BA = BC$．[2]

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形（菱形的定义）．

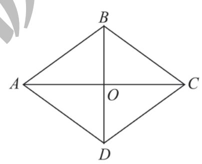


图 6-3

定理　对角线互相垂直的平行四边形是菱形．

议一议

已知线段 AC，你能用尺规作图的方法作一个菱形 $ABCD$，使 AC 为菱形的一条对角线吗？

第 2 课时接着研究菱形的判定方法．菱形的定义当然是一个重要的判定方法，但本课时主要研究定义之外的判定方法．

[1] 探寻菱形的判定方法，可以有两个思考角度：一是着眼于要判定的图形所属的范围：是平行四边形还是四边形？二是着眼于要判定的图形的组成元素：考虑对角线还是考虑边？教科书首先引导学生考虑满足什么条件的平行四边形是菱形，教学时也可以根据实际情况进行适当的调整．

教科书提出的问题具有一定的开放性．由于要判定的图形是平行四边形，因此若考虑边，则容易想到满足的条件是一组邻边相等，这就是定义；若考虑对角线，则可能受性质的启发，想到满足的条件是对角线互相垂直．教学时应鼓励学生积极探索，大胆猜想．在此基础上再进行严格的证明．

[2] 可能会有学生用证明三角形全等的方法证明 $BA= BC$．对此，教师可引导学生对两种方法进行比较．

议一议

通过菱形作图，引导学生探索菱形的另一种判定方法．教科书以小刚的身份提供了一种作法，教学时可鼓励学生独立寻求作法，并要求他们思考自己作法的正确性，进而得到菱形的另一种判定方法．

如图 6-4，分别以 A，C 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AC$ 的长为半径作弧，两条弧分别相交于点 B，D，依次连接 A，B，C，D，四边形 $ABCD$ 是菱形.

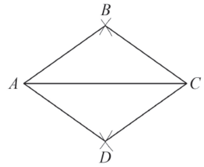


图 6-4

你是怎么做的？你认为小刚的做法正确吗？与同伴交流.

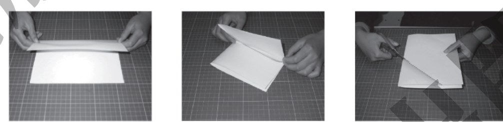
定理 四条边都相等的四边形是菱形.

请你完成这个定理的证明.[1]

做一做

你能用折纸等办法得到一个菱形吗？动手试一试！

先将一张长方形的纸对折，再对折，然后沿图中的虚线剪下一个角并展开，就得到了一个菱形.



你能说说小颖这样做的道理吗？

如果给你一张不规则的纸，你也能通过折纸等办法得到一个菱形吗？

例 2 已知：如图 6-5，在 ▱$ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$.

求证：▱$ABCD$ 是菱形.

证明： 在 $\triangle AOB$ 中，

$\because AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$OB=1$，

[1] 证明思路是：先证明四边形是平行四边形，再证明它是菱形. 教学时应鼓励学生先独立完成，再进行展示交流.

做一做

目的是鼓励学生利用菱形的判定方法，设计制作菱形的方案，或说明已知制作菱形方案的正确性.

教学时不应局限于教科书给出的方法，而应放手让学生去思考、操作，鼓励学生展示自己的制作方法. 可能有学生会制作出正方形，对此也要予以肯定，同时让学生思考：能否制作出一个不是正方形的菱形？再增加怎样的环节可以变为非正方形的菱形？

小颖的方法是利用轴对称制作了一个四边相等的四边形，因此一定是菱形. 教学中，可以引导学生利用菱形的判定方法说明自己制作方法是正确的，从而巩固学生对菱形判定定理的理解.

例 2

这是菱形判定定理的直接应用. 教学时应关注证明思路的探寻与分析：已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再具备什么条件就可以成为菱形呢？由已知条件可以证明邻边相等吗？可以证明对角线垂直吗？

$\therefore AB^2 = AO^2 + OB^2$.

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形，$\angle AOB$ 是直角.

$\therefore AC \perp BD$.

$\therefore \square ABCD$ 是菱形（对角线互相垂直的平行四边形是菱形）.

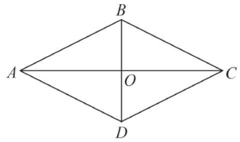


图 6–5

随堂练习

1. 画一个菱形，使它的两条对角线长分别为 4 cm，6 cm.

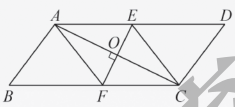
2. 证明：一条对角线平分一内角的平行四边形是菱形.

习题 6.2

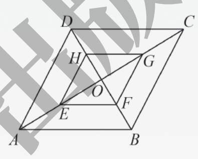
知识技能

1. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 的垂直平分线分别与 AD，AC，BC 相交于点 E，O，F.

求证：四边形 $AFCE$ 是菱形.



（第 1 题）



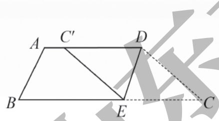
（第 2 题）

2. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 E，F，G，H 分别是 OA，OB，OC，OD 的中点.

求证：四边形 $EFGH$ 是菱形.

数学理解

3. 如图，在四边形纸片 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$AD > CD$，将纸片沿过点 D 的直线折叠，使点 C 落在 AD 上的点 C' 处，折痕 DE 交 BC 于点 E，连接 $C'E$. 你能确定四边形 $CDC'E$ 的形状吗？证明你的结论.



（第 3 题）

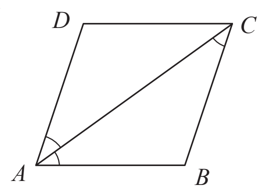
随堂练习

1. 图略.

提示：要想画出平行四边形，两条对角线必须互相平分；要想使画出的平行四边形成为菱形，两条对角线还必须互相垂直. 因此，画两条互相垂直平分的线段，使它们的长分别等于已知长度，然后再顺次连接四个端点，即可得到所要求的菱形.

学生完成后，可让学生证明自己画法的正确性. 通过此题，可以得到菱形的又一种判定方法：对角线互相垂直平分的四边形是菱形. 当然，根据《标准》的要求，教科书没有把这一结论作为定理.

2. 提示：如图，可证明 $AB = BC$.



习题6.2

1. 提示：证明 $\triangle AEO \cong \triangle CFO$，从而得到 $OE = OF$，再从对角线的角度即可证明结论.

此题是以已知、求证这种静态方式给出的，教学中也可以从动态的角度来看，即将 $\square ABCD$ 对折，使点 A 与点 C 重合，那么 EF 就是折痕.

2. 提示：利用菱形的对角线互相垂直平分的性质及已知条件，证明四边形 $EFGH$ 的对角线互相垂直平分；再从对角线的角度判定四边形 $EFGH$ 是菱形.

3. 四边形 $CDC'E$ 是菱形.

提示：由折叠可知 $\triangle C'DE \cong \triangle CDE$，再利用平行关系证明 $\angle C'DE = \angle CED$，然后既可以根据四边相等进行判定，也可以根据定义进行判定.

前两课时分别对菱形的性质与判定进行了研究，本课时运用菱形的性质定理和判定定理解决一些问题，一方面可以巩固对菱形的性质定理与判定定理的理解，另一方面在解决问题的过程中还可以使学生认识性质定理与判定定理的区别，正确应用有关定理.

例 3

本例是菱形性质的应用与菱形面积的计算.

一般来说，计算菱形的面积时除可以按平行四边形的面积计算方法计算外，还可以根据菱形的特殊性用特殊的方法计算，即菱形的面积等于其对角线乘积的一半. 本例实际推导了这一结论.

做一做

运用菱形的定义解决问题，同时也提供了一种制作菱形的方法.

例 3 如图 6-6，四边形 $ABCD$ 是边长为 13 cm 的菱形，其中对角线 BD 长 10 cm. 求：

（1）对角线 AC 的长度；

（2）菱形 $ABCD$ 的面积.

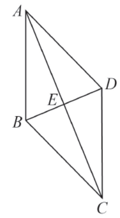


图 6-6

解：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，AC 与 BD 相交于点 E，

$\therefore \angle AED = 90^\circ$（菱形的对角线互相垂直），

$DE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

$\therefore AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$（cm）.

$\therefore AC = 2AE = 2 \times 12 = 24$（cm）（菱形的对角线互相平分）.

（2）菱形 $ABCD$ 的面积

$= \triangle ABD$ 的面积 $+ \triangle CBD$ 的面积

$= 2 \times \triangle ABD$ 的面积

$= 2 \times \frac{1}{2} \times BD \times AE$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 10 \times 12$

$= 120$（cm^2）.

做一做

如图 6-7，两张等宽的纸条交叉重叠在一起，重叠的部分 $ABCD$ 是菱形吗？为什么？

图 6-7

重叠的部分 $ABCD$ 是菱形. 说明理由时，首先要根据纸条的两长边互相平行说明 $ABCD$ 是平行四边形；然后由纸条等宽说明两条邻边上的高相等，进而利用平行四边形的面积说明两邻边相等.

随堂练习

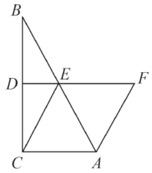
1. 菱形 $ABCD$ 的周长为 40 cm，它的一条对角线长 10 cm.

（1）求菱形的每一个内角的度数；

（2）求菱形另一条对角线的长.

2. 已知：如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，BC 的垂直平分线分别交 BC 和 AB 于点 D，E，点 F 在 DE 的延长线上，且 $AF=CE$.

求证：四边形 $ACEF$ 是菱形.



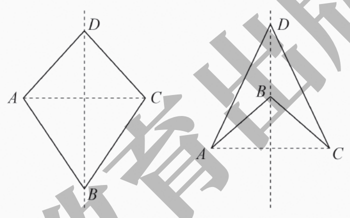
（第 2 题）

读一读

筝　形

一条对角线所在直线垂直平分另一条对角线的四边形叫做筝形.

筝形可以分为两类：凸筝形和凹筝形. 每个内角都小于平角的筝形叫做凸筝形（如图 6-8（1））；有一个内角大于平角的筝形叫做凹筝形（如图 6-8（2））.



（1）　（2）

图 6-8

筝形有如下性质：

（1）筝形有两组邻边分别相等；

（2）筝形有一组对角相等；

（3）筝形是轴对称图形.

菱形是特殊的凸筝形.

随堂练习

本随堂练习提供了一个菱形性质的练习和一个菱形判定的练习. 第1题属于几何计算题，教学时要引导学生既关注结果是否正确，也要关注过程书写是否有条理、理由是否充分. 第2题的证明有一定的难度，学生解答时可能会出现想当然的情况，教学时要注意引导和纠正.

1.（1）60°，120°，60°，120°；

（2）$10\sqrt{3}$ cm.

2. 提示：可以先证明$\triangle AEC$ 是等边三角形，再证明$\triangle AEF$ 也是等边三角形，然后利用四条边相等的四边形是菱形证明结论.

读一读

平行四边形和梯形是我们常见的两种特殊的四边形，筝形是另一种常见的特殊的四边形，我们在很多几何图形中都能看到筝形.

筝形主要有如下性质：

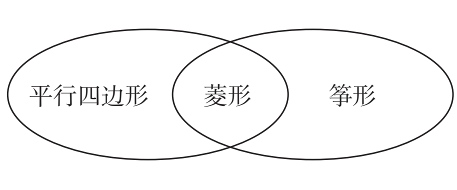
（1）有两组邻边分别相等；

（2）有一组对角相等；

（3）一条对角线所在直线垂直平分线另一条对角线；

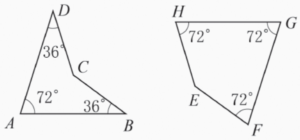
（4）是轴对称图形，有一条对角线所在直线是它的对称轴.

菱形是筝形的特殊情况. 菱形、平行四边形和筝形的关系如右图.



10 世纪 70 年代，英国数学物理学家罗杰·彭罗斯（Roger Penrose）发现了一对特殊的筝形：“标枪”和“风筝”（如图6−9）.“标枪”和“风筝”不仅可以拼凑成菱形（如图6−10），而且还可以拼凑成许多有趣的图案.图6−11中的图案彭罗斯分别称它们为“国王”“王后”“星星”和“太阳”.更重要的是，用“标枪”和“风筝”可以密铺平面，而且密铺方式有无限多种，下图就是密铺的三种方式.

一位英国数学家发现了一对特殊的筝形，他把它们称作“标枪”和“风筝”（如图6−9）.



“标枪”　“风筝”

图 6−9

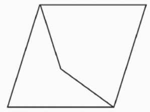


图 6−10

“标枪”和“风筝”的边长满足下面的关系：

$$AB = AD = GF = GH,$$

$$CB = CD = EF = EH.$$

“标枪”和“风筝”不仅可以拼凑成菱形（如图6−10），而且还可以拼凑成许多有趣的图案（如图6−11）.

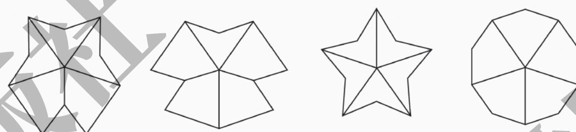

“国王”　“王后”　“星星”　“太阳”

图 6−11

用这两种图形，可以镶嵌整个平面（如图6−12）.

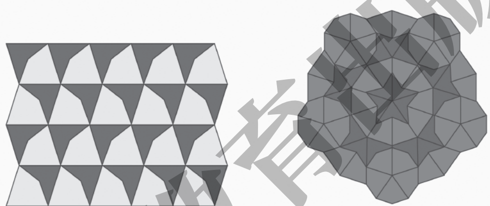
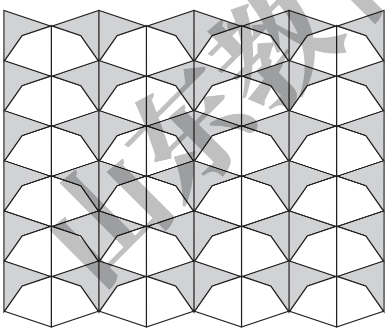
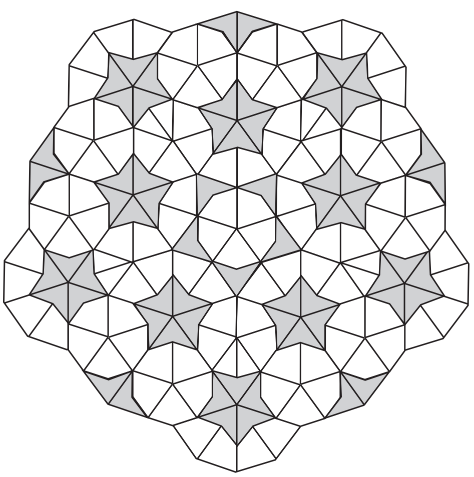
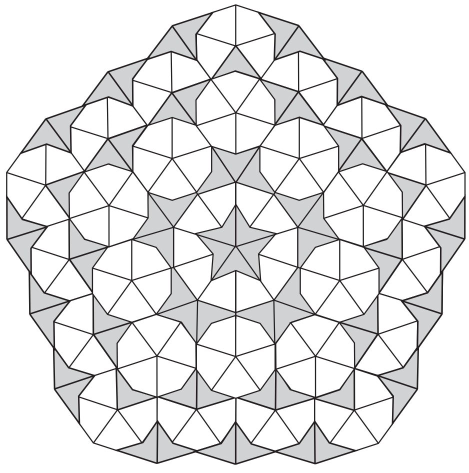

（1）　（2）

图 6−12

在图6−12（2）中，你能看到“国王”“王后”“星星”和“太阳”的图案吗？



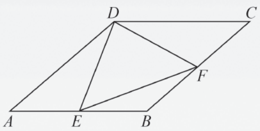




习题 6.3

知识技能

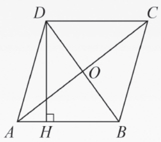
1. 已知：如图，在菱形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB 和 BC 上的点，且 $BE=BF$.
求证：（1）$\triangle ADE \cong \triangle CDF$；（2）$\angle DEF=\angle DFE$.



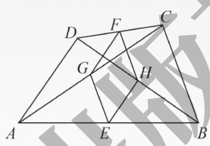
（第 1 题）

2. 证明：菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

3. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $AC=16$，$BD=12$，求菱形 $ABCD$ 的高 DH.



（第 3 题）

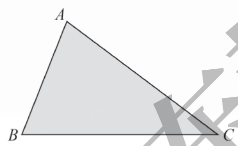


（第 4 题）

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC$，点 E，F，G，H 分别是 AB，CD，AC，BD 的中点.
求证：四边形 $EGFH$ 是菱形.

数学理解

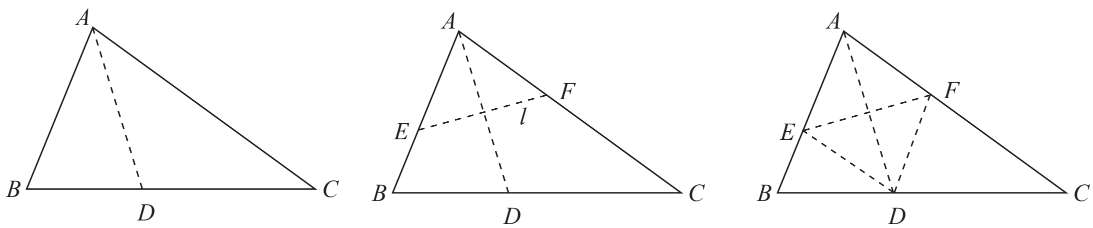
5. 请用一张如图所示的三角形纸片 ABC 折出一个菱形，使 $\angle A$ 为菱形的一个内角，且菱形的一个顶点在 BC 边上.



（第 5 题）

习题6.3

1. 略.
2. 提示：可参考教科书例 3（2）的解答过程.
   此题是以文字命题的形式给出，要求学生根据题意画出图形，并标上字母，进而根据图形写出已知、求证，再证明. 对于学有余力的学生，还可以启发他们进一步思考：怎样的四边形可以用对角线乘积的一半来求面积？
3. 9.6.
   提示：利用上题的结论，可求出菱形的面积为 96；用勾股定理可求出菱形的边长为 10，进而可求出菱形的高.
4. 提示：利用三角形中位线定理证明.
5. 提示：先折出 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD，再折出 AD 的垂直平分线 l，设 l 与 AB，AC 分别交于点 E，F. 最后沿 ED，FD 折叠，就得到满足条件的菱形 $AEDF$（如下图）.



本题有一定难度，教学时可鼓励学生思考、交流、探讨. 对于学生提出的不同方法，要予以鼓励，并要求学生证明自己方法的正确性.

本节教科书从不同角度、利用不同情境引导学生关注菱形的应用，让学生不仅能解决常规的证明问题，而且可以把证明与解决问题融为一体，在解决问题的过程中进一步体会有关内容的意义和作用.

教学目标

1. 理解矩形的概念，了解它与平行四边形之间的关系.

2. 经历矩形性质定理和判定定理的探索过程，进一步发展合情推理能力.

3. 能够用综合法证明矩形的性质定理和判定定理，以及其他相关结论，进一步发展演绎推理能力.

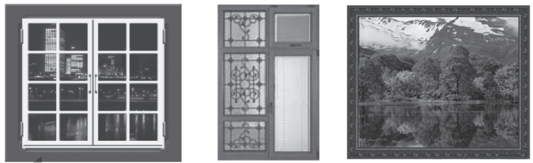
4. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

5. 进一步体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节的设计思路与第1节的设计思路类似，仍然按“概念—性质—判定—应用”的线索展开. 本节安排3课时，第1课时是矩形性质定理的探索与证明，第2课时是矩形判定定理的探索与证明，第3课时是矩形性质定理和判定定理的综合应用. 当然，教学中也可以根据学生状况进行适当的调整.

2 矩形的性质与判定

[1] 观察下面的图片，我们能够发现其中包含了一些特殊的平行四边形，这些特殊的平行四边形有哪些共同的特征呢？



有一个角是直角的平行四边形叫做**矩形**（rectangle）.

矩形是生活中常见的图形，你还能举出一些生活中矩形的例子吗？与同伴交流.

想一想

（1）矩形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗？

（2）你认为矩形还具有哪些特殊的性质？与同伴交流.

[2] 通过观察，可以发现矩形的四个角都是直角，对角线相等. 下面我们证明这些结论.

已知：如图 6-13，四边形 $ABCD$ 是矩形，$\angle ABC = 90°$，对角线 AC 与 DB 相交于点 O.

求证：（1）$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$；（2）$AC = DB$.

第1课时首先对矩形的性质进行探索. 由于矩形是学生比较熟悉的图形，因此教科书先引导学生进行理性思考，得到猜想后再进行证明. 之后，根据矩形的性质定理探索直角三角形的一个性质：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

[1] 学生在小学已经学习过长方形和正方形，因此矩形对他们来说并不陌生. 教科书通过展示生活中的一些矩形图片，唤醒学生的记忆，并通过问题引导学生观察、思考这些图形的共同特征，从而抽象出矩形的定义.

想一想

（1）此处采用了和菱形类似的处理方式，从矩形与平行四边形的关系入手，思考矩形的性质. 矩形是特殊的平行四边形，因此具有一般平行四边形的所有性质. 教科书首先让学生列举出这些性质，一方面是对平行四边形性质的回顾；另一方面在回顾这些性质的过程中，结合矩形的形状特征，学生有可能感悟到矩形的一些特殊性质，为接下来发现并证明矩形的特殊性质做好铺垫.

（2）因为平行四边形是中心对称图形，因此矩形当然也是中心对称图形，所以这里不再提及. 此外，矩形还是轴对称图形，它有两条对称轴，两条对称轴互相垂直.

（3）由于矩形是学生比较熟悉的图形，因此可鼓励学生认真观察，积极探索，大胆猜想，并与同学进行交流.

[2] 通过上面的观察、思考、交流等活动，发现了矩形的性质. 其中的对称性只是通过合情推理加以认识，不证明；其他性质要进行严格的证明.

教学时，应鼓励学生先独立思考，自主分析证明思路，独自完成证明过程. 在此基础上，由学生代表展示证明的书写过程，师生共同评议.

证明：（1）∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB \parallel DC$（矩形的对边平行），

$\angle ABC=\angle CDA$，$\angle BCD=\angle DAB$（矩形的对角相等）.

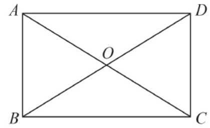


图 6-13

∴ $\angle ABC+\angle BCD=180^\circ$.

又∵ $\angle ABC=90^\circ$，

∴ $\angle BCD=90^\circ$.

∴ $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90^\circ$.

（2）∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴ $AB=DC$（矩形的对边相等）.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$ 中，

∵ $AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，$BC=CB$，

∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

∴ $AC=DB$.

定理　矩形的四个角都是直角.

定理　矩形的对角线相等.

想一想

矩形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？

矩形是轴对称图形.

议一议

如图 6-14，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 E，那么 BE 是 Rt$\triangle ABC$ 中一条怎样的特殊线段？它与 AC 有什么大小关系？由此你能得到怎样的结论？

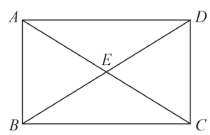


图 6-14

议一议

目的是通过一个问题情境让学生探索直角三角形斜边上的中线与斜边的关系. 在说明理由时，需要用到“矩形的对角线相等且互相平分”的性质，教师可结合这一点再次强调特殊平行四边形具有一般平行四边形的所有性质.

定理　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

你能证明这个定理吗?

例 1　如图 6-15，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线相交于点 O，$\angle AOD = 120°$，$AB = 2.5$，求矩形对角线的长.

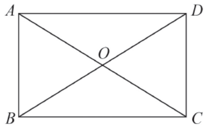


图 6-15

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AC = BD$（矩形的对角线相等），

$OA = OC = \frac{1}{2}AC$，$OB = OD = \frac{1}{2}BD$（矩形的对角线互相平分）.

$\therefore OA = OD$.

$\because \angle AOD = 120°$，

$\therefore \angle ODA = \angle OAD = \frac{1}{2}(180° - 120°) = 30°$.

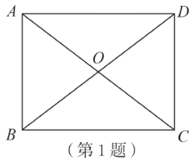
又 $\because \angle DAB = 90°$（矩形的四个角都是直角），

$\therefore BD = 2AB = 2 \times 2.5 = 5$.

你还有其他解法吗?

随堂练习

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，两条对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AB = 6$，$OA = 5$. 求 BD 与 AD 的长.
2. 一个矩形的两条对角线的一个夹角为 60°，对角线长为 15，求矩形较短边的长.



（第 1 题）

习题 6.4

知识技能

1. 一个矩形的对角线长为 2，对角线与一边的夹角是 45°，求矩形的各边长.

在探索出结论之后，要求学生写出已知、求证，并进行证明. 需要注意的是，上面“议一议”中问题的条件和该定理的条件不尽相同. 证明这一定理的关键是构造辅助图形（矩形），构造矩形的方法不唯一. 比如，可以过点 A 作 BC 的平行线（如教科书图 6-14），与 BE 的延长线交于点 D，连接 CD. 然后证明 $\triangle BCE \cong \triangle DAE$，得到 $BC = AD$，进而证明四边形 $ABCD$ 是矩形. 再利用“矩形的对角线相等且互相平分”即可证明结论.

例 1

本例是运用矩形的性质求线段的长度. 教科书给出的解法，除用到矩形的一些性质外，还用到了定理：在直角三角形中，如果一个锐角等于 30°，那么它所对的直角边等于斜边的一半.

本例也可以按这样的思路解：由 $\angle AOD = 120°$，得 $\angle AOB = 60°$，进而可证 $OA = AB = OB$，从而 $AC = 2OA = 2 \times 2.5 = 5$.

教学中要提倡解法的多样化，对学生的不同解法，教师应予以鼓励.

随堂练习

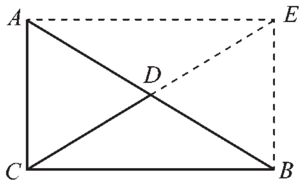
1. $BD = 10$，$AD = 8$.　　2. 7.5.

习题6.4

1. $\sqrt{2}$.
2. 四边形 $ADCE$ 是菱形.

　提示：由 $AE \parallel CD$，$CE \parallel AB$，可知四边形 $ADCE$ 是平行四边形；再利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可证 $AD = CD$.

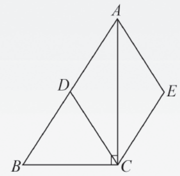
3. 这是定理“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”的逆命题，要求学生根据题意画出图形，并标好字母，然后分别写出已知、求证.



思路一：如图，延长 CD 至 E，使 $DE=CD$，连接 AE，BE. 由 $AD=BD$，$DE=CD$，可知四边形 $ACBE$ 是平行四边形；再证 $AB=CE$，所以 ▱$ACBE$ 是矩形；所以 $\angle ACB=90^\circ$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

思路二：由 $AD=CD=BD$，可知 $\triangle ADC$ 与 $\triangle CDB$ 是等腰三角形，所以 $\angle DAC=\angle DCA$，$\angle DCB=\angle DBC$，进而可得 $\angle DCA+\angle DCB=\angle DAC+\angle DBC$，即 $\angle ACB=\angle DAC+\angle DBC$；再由 $\angle ACB+\angle DAC+\angle DBC=180^\circ$，可证 $\angle ACB=90^\circ$，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

2. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为 AB 的中点，$AE\parallel CD$，$CE\parallel AB$，试判断四边形 $ADCE$ 的形状，并证明你的结论.

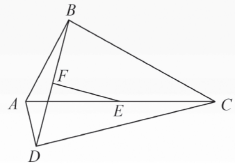


（第 2 题）

数学理解

3. 证明：如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形.

4. 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$，$E$，$F$ 分别是 AC，BD 的中点.
求证：$EF\perp BD$.



（第 4 题）

做一做

如图 6-16，在一个平行四边形活动框架上，用两根橡皮筋分别套在相对的两个顶点上，拉动一对不相邻的顶点时，平行四边形的形状会发生变化.

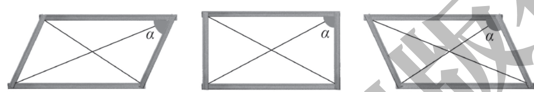


图 6-16

（1）随着 $\angle\alpha$ 的变化，两条对角线的长度将发生怎样的变化？

（2）当两条对角线的长度相等时，平行四边形有什么特征？由此你能得到一个怎样的猜想？

定理　对角线相等的平行四边形是矩形.

已知：如图 6-17，在 ▱$ABCD$ 中，AC，DB 是它的两条对角线，$AC=DB$.
求证：▱$ABCD$ 是矩形.

4. 提示：连接 BE，DE，则 $BE=\dfrac{1}{2}AC$，$DE=\dfrac{1}{2}AC$，所以 $BE=DE$，从而 EF 是等腰三角形 BDE 底边上的中线.

第 2 课时研究矩形的判定定理. 教科书首先引导学生探索并证明“对角线相等的平行四边形是矩形”，接着再研究“有三个角是直角的四边形是矩形”. 教学时，根据实际情况，也可以先提出一个较为开放的问题，放手让学生探索矩形的各种判定方法，形成猜想，在此基础上再分别进行证明.

做一做

利用平行四边形活动框架，一方面体会四边形的不稳定性，另一方面引导学生观察：在平行四边形中，随着一个内角的变化，两条对角线的长度会发生变化，平行四边形的形状也在发生变化；当变化到两条对角线相等时，这个内角看上去是直角，此时平行四边形看上去是矩形. 由此得到一个猜想：对角线相等的平行四边形是矩形.

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = DC$，$AB /\!/ DC$.

又 $\because BC = CB$，$AC = DB$，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$.

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$.

$\because AB /\!/ DC$，

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^\circ$.

$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$.

$\therefore \square ABCD$ 是矩形（矩形的定义）.

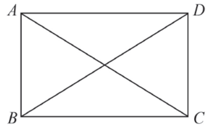


图 6−17

想一想

我们知道，矩形的四个角都是直角. 反过来，一个四边形至少有几个角是直角时，这个四边形就是矩形呢？能证明你的结论吗？与同伴交流.

定理　有三个角是直角的四边形是矩形.

议一议

你有什么方法检查你家（或教室）刚安装的门框是不是矩形？如果仅有一根较长的绳子，你怎样检查？请说明检查方法的合理性，并与同伴交流.

例 2　如图 6−18，在 $\square ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\triangle ABO$ 是等边三角形，$AB = 1$，求 $\square ABCD$ 的面积.

解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OA = OC$，$OB = OD$.

又 $\because \triangle ABO$ 是等边三角形，

$\therefore OA = OB = AB = 1$，$\angle BAC = 60^\circ$.

$\therefore OA = OB = OC = OD = 1$.

$\therefore AC = BD = 2AB = 2 \times 1 = 2$.

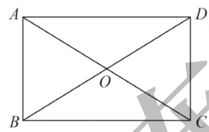


图 6−18

本定理的证明思路是：利用全等三角形证明平行四边形的某两个相邻的角相等，而这两个角又互补，所以它们都是直角.

想一想

如果要判定的图形是四边形，那么怎么判定它是矩形呢？教科书引导学生通过逆向思考矩形的性质提出猜想，并进行证明. 教学时，应鼓励学生用自己的方式进行探究、思考.

证明的思路是：利用“同旁内角互补，两直线平行”证明四边形是平行四边形，然后利用矩形的定义进行判定.

议一议

利用矩形的判定定理解决问题.

检查的方法是：先用绳子测量门框的对边是否相等，若相等，则可判定其为平行四边形；然后再用绳子测量门框的对角线是否相等，若相等，则可肯定门框是矩形. 道理是：对角线相等的平行四边形是矩形.

例 2

本例是求 $\square ABCD$ 的面积，为此需要先判定 $\square ABCD$ 是矩形. 教学时，应鼓励学生积极思考，寻求解题思路.

可能会有学生没有证明 $\square ABCD$ 是矩形，却想当然地认为它是矩形而直接计算. 对此，教师应适时地加以启发引导.

也可能会有学生利用习题 6.4 第 4 题的结论“如果一个三角形一边上的中线等于这边的一半，那么这个三角形是直角三角形”进行证明. 对于这样的方法，教师首先应予以鼓励，但同时也要向学生说明，那个结论虽然是正确的，但教科书没有把它作为定理，所以不能直接以它为依据进行证明.

$\therefore$ $\square ABCD$ 是矩形（对角线相等的平行四边形是矩形）.

$\therefore$ $\angle ABC=90°$（矩形的四个角都是直角）.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理，得

$AB^2+BC^2=AC^2$,

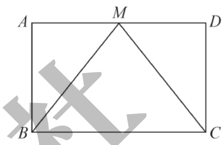
$\therefore BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\square ABCD}=AB\cdot BC=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

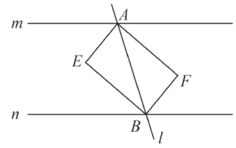
随堂练习

1. 已知：如图，在 $\square ABCD$ 中，M 是 AD 边的中点，且 $MB=MC$.

求证：四边形 $ABCD$ 是矩形.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，直线 l 与平行线 m，n 分别相交于点 A，B，两组同旁内角的平分线分别相交于点 E，F.

求证：四边形 $AEBF$ 是矩形.

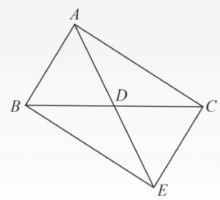
习题 6.5

知识技能

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD 为 BC 边上的中线，延长 AD 至 E，使 $DE=AD$，连接 BE，CE.

（1）试判断四边形 $ABEC$ 的形状；

（2）当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $ABEC$ 是矩形？



（第 1 题）

随堂练习

1. 提示：证明 $\triangle ABM\cong\triangle DCM$.
2. 提示：由平行线的内错角相等可以证得 $\angle EBA=\angle FAB$，$\angle EAB=\angle ABF$，所以 $BE\parallel AF$，$BF\parallel AE$，从而四边形 $AEBF$ 是平行四边形.

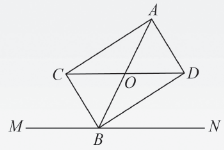
   再由平行线的同旁内角互补可以证得 $\angle EAB+\angle EBA=90°$，所以 $\angle E=90°$，所以四边形 $AEBF$ 是矩形.

习题6.5

1.（1）四边形 $ABEC$ 是平行四边形；

（2）当 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 是直角时，四边形 $ABEC$ 是矩形.

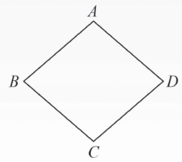
2. 如图，点 B 在直线 MN 上，过 AB 的中点 O 作 MN 的平行线，分别交 $\angle ABM$ 的平分线和 $\angle ABN$ 的平分线于点 C，D，连接 AC，AD. 试判断四边形 $ACBD$ 的形状，并证明你的结论.



（第 2 题）

问题解决

3. 如图，已知菱形 $ABCD$，作一个矩形，使得 A，B，C，D 四个点分别在矩形的四条边上，且矩形的面积为菱形 $ABCD$ 面积的 2 倍.



（第 3 题）

例 3 如图 6-19，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=6$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$AE\perp BD$，垂足为点 E，$ED=3BE$. 求 AE 的长.

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AO=BO=DO=\frac{1}{2}BD$（矩形的对角线相等且互相平分），

$\angle BAD=90^\circ$（矩形的四个角都是直角）.

$\because ED=3BE$，

$\therefore BE=OE$.

又 $\because AE\perp BD$，

$\therefore AB=AO$.

$\therefore AB=AO=BO$，

即 $\triangle ABO$ 是等边三角形.

$\therefore \angle ABO=60^\circ$.

$\therefore \angle ADB=90^\circ-\angle ABO=30^\circ$.

在 Rt$\triangle AED$ 中，

$\because \angle ADE=30^\circ$，

$\therefore AE=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}\times 6=3$.

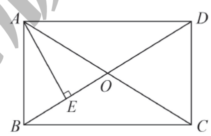
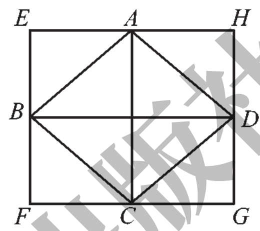


图 6-19

2. 四边形 $ACBD$ 是矩形.

提示：先证明 $OC=OB$，$OD=OB$，于是 $OC=OD$，从而四边形 $ACBD$ 是平行四边形；然后再证明 $\angle CBD$ 是直角.

3. 提示：如图，分别过点 A 和 C 作 BD 的平行线，分别过点 B 和 D 作 AC 的平行线. 可以证明，所得四边形 $EFGH$ 就是所要求的矩形.



本课时继续对矩形的性质定理和判定定理进行巩固应用，进一步提升学生的应用能力与证明能力. 教学中，要引导学生思考性质定理和判定定理的区别，正确使用定理.

例 3

本例是矩形性质定理的应用，有一定难度. 教学时，要给学生留出一定的思考时间，鼓励学生积极寻求解题思路.

例 4

本例是矩形判定定理的应用. 教学中，建议教师给予学生更多的思考空间，鼓励学生提出不同于教科书的证法.

想一想

对例 4 进行拓展. 教科书在这里提出了两个问题，要求学生自己进行判断. 教学中也可以让学生自己从图形中发现一些结论，提高他们发现问题和提出问题的能力.

（1）四边形 $ABDE$ 是平行四边形，证明略.

（2）$DF \parallel AB$，且 $DF=\frac{1}{2}AB$，证明略. 此问题要从位置和数量关系两方面来考虑.

例 4　已知：如图 6-20，在△ABC 中，$AB=AC$，AD 为∠BAC 的平分线，AN 为△ABC 的外角∠CAM 的平分线，$CE\perp AN$，垂足为点 E.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

证明：∵ AD 平分∠BAC，AN 平分∠CAM，

∴ $\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$，$\angle CAN=\frac{1}{2}\angle CAM$.

∴ $\angle DAE=\angle CAD+\angle CAN$

$=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle CAM)$

$=\frac{1}{2}\times 180^\circ$

$=90^\circ$.

在△ABC 中，

∵ $AB=AC$，AD 为∠BAC 的平分线，

∴ $AD\perp BC$.

∴ $\angle ADC=90^\circ$.

又∵ $CE\perp AN$，

∴ $\angle CEA=90^\circ$.

∴ 四边形 $ADCE$ 是矩形（有三个角是直角的四边形是矩形）.

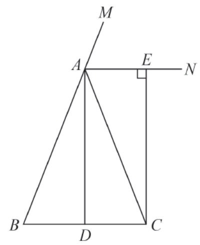


图 6-20

想一想

在例 4 中，连接 DE，交 AC 于点 F（如图 6-21）.

（1）试判断四边形 $ABDE$ 的形状，并证明你的结论.

（2）线段 DF 与 AB 有怎样的关系？请证明你的结论.

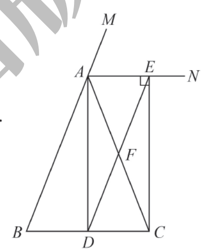


图 6-21

随堂练习

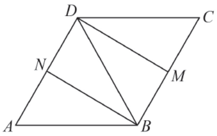
1. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是由两个全等的等边三角形 ABD 和 CBD 组成的，M，N 分别是 BC 和 AD 的中点.

随堂练习

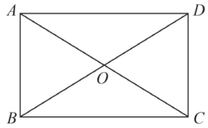
1. 提示：利用等腰三角形“三线合一”的性质. 教学中也可以利用此题，让学生提出一些问题，并进行证明. 比如，四边形 $ABCD$ 的形状问题；连接 MN 后，四边形 $DNMC$ 的形状问题；还可以从边的关系、角的关系提出一些问题.

2. $4\sqrt{3}$.

求证：四边形 $BMDN$ 是矩形.



（第 1 题）



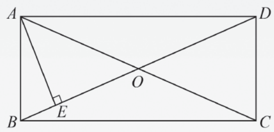
（第 2 题）

2. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle ACB=30^\circ$，$BD=4$，求矩形 $ABCD$ 的面积.

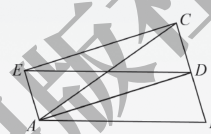
习题 6.6

知识技能

1. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 A 作 BD 的垂线，垂足为点 E. 已知 $\angle EAD=3\angle BAE$，求 $\angle EAO$ 的度数.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 为 BC 的中点，四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

求证：四边形 $ADCE$ 是矩形.

问题解决

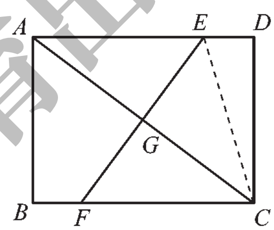
※**3.** 如图，有一矩形纸片 $ABCD$，$AB=6$ cm，$BC=8$ cm，将矩形纸片折叠，使点 C 与点 A 重合，请在图中画出折痕，并求折痕的长.

（第 3 题）

习题6.6

1. 45°.
2. 提示：利用等腰三角形的性质和平行四边形的性质.
3. 如图所示，EF 为折痕，$EF=7.5$ cm.

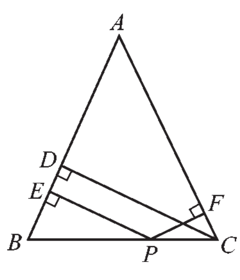
   提示：可以求得 $AC=10$ cm. 折痕 EF 垂直平分线段 AC，因此 $AE=CE$. 在 Rt $\triangle CDE$ 中应用勾股定理，即可列出以 AE 为未知数的方程，解方程可求得 AE. 在 Rt $\triangle AGE$ 中求 GE. 学习相似后还可以让学生用相似解此题，并进行方法比较.



4. $\dfrac{12}{5}$.

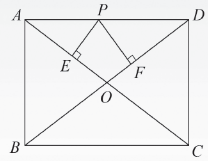
   提示：连接 PO，则 $\triangle APO$ 与 $\triangle DPO$ 的面积之和等于矩形 $ABCD$ 面积的 $\dfrac{1}{4}$.

   本题实际上就是求等腰三角形底边上的一点到两腰的距离之和. 可以证明，等腰三角形底边上的一点到两腰的距离之和，等于腰上的高（如图）.



联系拓广

※**4.** 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$，P 是 AD 上不与 A 和 D 重合的一个动点，过点 P 分别作 AC 和 BD 的垂线，垂足为点 E，F. 求 $PE+PF$ 的值.



（第 4 题）

3 正方形的性质与判定

[1]图 6−22 中的四边形都是矩形，但有些矩形比较特殊，你能说出这些特殊矩形的特征吗？

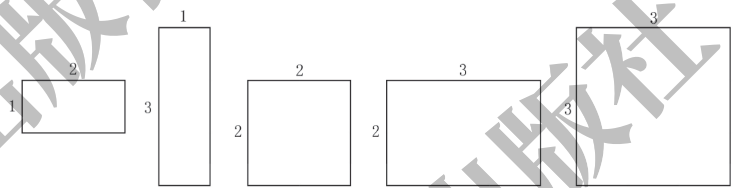


图 6−22

[2]有一组邻边相等的矩形叫做**正方形**（square）.

议一议

（1）正方形是菱形吗？

（2）你认为正方形具有哪些性质？与同伴交流.

正方形既是矩形，又是菱形，它具有矩形与菱形的所有性质.

教学目标

1. 理解正方形的概念，了解它与菱形、矩形、平行四边形之间的关系.

2. 探索并证明正方形的性质定理和判定定理，进一步发展推理能力.

3. 体会探索与证明过程中所蕴含的抽象、推理等数学思想.

本节安排 2 课时，分别研究正方形的性质定理与判定定理.

第 1 课时，教科书在引入正方形的概念后，通过“议一议”，明确正方形既是矩形，也是菱形，因此具有矩形、菱形的一切性质. 由此便可直接推得正方形的性质定理. 所以，正方形性质定理的获得过程比较简单，这方面与菱形、矩形有所不同.

[1]学生对正方形比较熟悉，因此教科书直接让学生观察一组矩形，从特殊的矩形中引入正方形的定义.

[2]教科书是用矩形来定义正方形的. 如果用菱形定义正方形，那么就是“有一个角是直角的菱形是正方形”；如果用平行四边形定义正方形，那么就是“有一组邻边相等，且有一个角是直角的平行四边形是正方形”. 教学中可以让学生进行讨论，并顺势转入下面的“议一议”环节.

议一议

引导学生思考正方形与矩形、菱形的关系，从而得出正方形具有的性质.

想一想（下页）

菱形是轴对称图形，其对称轴是两条对角线所在的直线；矩形也是轴对称图形，其对称轴是过对边中点的两条直线. 正方形既是菱形，也是矩形，所以正方形当然是轴对称图形，而且它有四条对称轴. 菱形、矩形、正方形的轴对称性也是它们特殊性的表现.

定理 正方形的四个角都是直角，四条边都相等.

定理 正方形的对角线相等且互相垂直平分.

想一想

正方形有几条对称轴?

例 1 如图 6-23，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 CD 边上一点，F 为 BC 延长线上一点，且 $CE=CF$. BE 与 DF 之间有怎样的关系？请说明理由.

解：$BE=DF$，且 $BE\perp DF$. 理由如下：

（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore BC=DC$，$\angle BCE=90^\circ$（正方形的四条边都相等，四个角都是直角）.

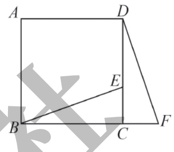


图 6-23

$\therefore \angle DCF=180^\circ-\angle BCE=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

$\therefore \angle BCE=\angle DCF$.

又 $\because CE=CF$，

$\therefore \triangle BCE\cong\triangle DCF$.

$\therefore BE=DF$.

（2）延长 BE 交 DF 于点 M（如图 6-24）.

$\because \triangle BCE\cong\triangle DCF$，

$\therefore \angle CBE=\angle CDF$.

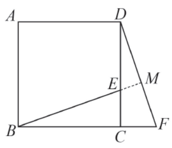


图 6-24

$\because \angle DCF=90^\circ$，

$\therefore \angle CDF+\angle F=90^\circ$.

$\therefore \angle CBE+\angle F=90^\circ$.

$\therefore \angle BMF=90^\circ$.

$\therefore BE\perp DF$.

议一议

平行四边形、菱形、矩形、正方形之间有什么关系？你能用一个图直观地表示它们之间的关系吗？与同伴交流.

如果有学生在上面“议一议”环节提出正方形的对称性问题，那么也可以在“议一议”环节讨论该问题.

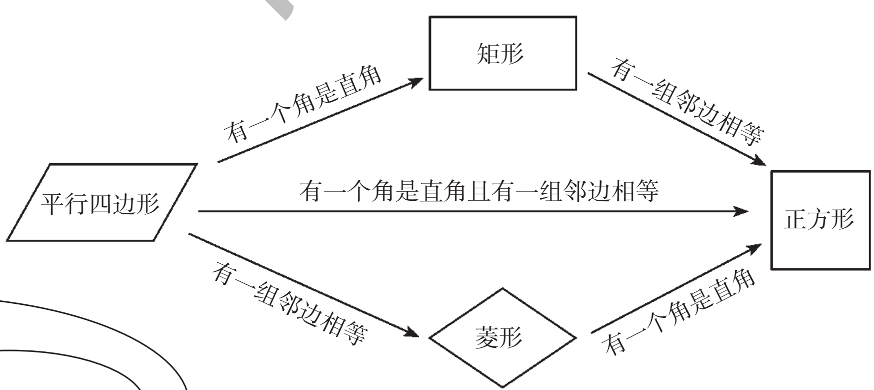
例 1

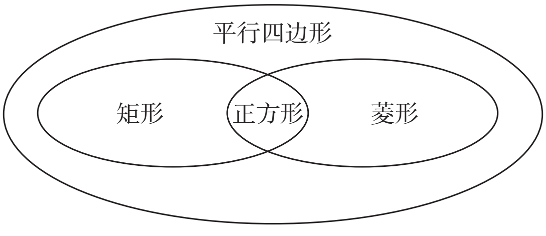
本例是利用正方形的性质判断两条线段之间的关系，这种关系包括数量关系和位置关系. 教学时，要先鼓励学生用自己的方式进行猜想. 比如，可以从旋转的角度来看，即 $\triangle DCF$ 可以看成是 $\triangle BCE$ 绕着点 C 按顺时针方向旋转 90° 形成的，从而猜想 $BE=DF$，$BE\perp DF$. 在学生猜想的基础上再展开证明.

议一议

引导学生整体地理解平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，并能直观地表示这种关系.

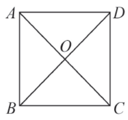
下面的关系图供参考：



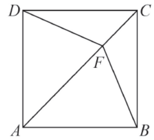


随堂练习

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，图中有多少个等腰三角形？



（第 1 题）

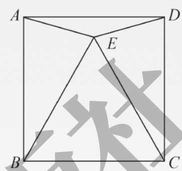


（第 2 题）

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 F 为对角线 AC 上一点，连接 BF，DF. 你能找出图中的全等三角形吗？选择其中一对进行证明.

习题 6.7

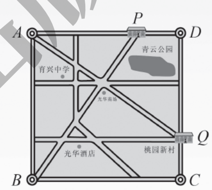
知识技能



（第 2 题）

1. 对角线长为 2 cm 的正方形，边长是多少？
2. 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，$\triangle CBE$ 是等边三角形，求 $\angle AEB$ 的度数.

数学理解



（第 3 题）

3. 如图，A，B，C，D 四家工厂分别坐落在正方形城镇的四个角上. 仓库 P 和 Q 分别位于 AD 和 DC 上，且 $PD=QC$. 证明两条直路 $BP=AQ$ 且 $BP\perp AQ$.

问题解决

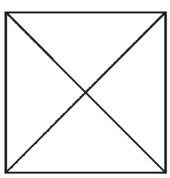
※4. 在一个正方形的花坛上，欲修建两条直的小路，使得两条直的小路将花坛分成面积相等的四部分（不考虑道路的宽度）. 你有几种方法？（至少说出三种）

随堂练习

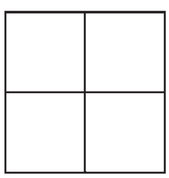
1. 图中有8个等腰三角形，并且都是等腰直角三角形.
2. $\triangle CDF\cong\triangle CBF$，
$\triangle FDA\cong\triangle FBA$，
$\triangle CDA\cong\triangle CBA$，证明略.
教学中可以引导学生从轴对称的角度去观察与思考.

习题6.7

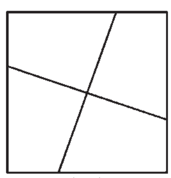
1. $\sqrt{2}$ cm.
2. $\angle AEB=75^\circ$.
提示：$\triangle ADE$ 是等腰三角形.
还可以对此题进行拓展：如果点 E 在正方形 $ABCD$ 的外部，那么 $\angle AEB$ 的度数是多少？它和本题中求得的度数有什么关系？
3. 提示：证明 $\triangle PAB\cong\triangle QDA$，得 $BP=AQ$，$\angle PBA=\angle QAD$，而 $\angle QAD+\angle BAQ=90^\circ$，所以 $\angle PBA+\angle BAQ=90^\circ$，所以 $BP\perp AQ$.
还可以对此题进行拓展：如果 $BP=AQ$，那么 $PD=QC$，$BP\perp AQ$ 成立吗？如果 $BP\perp AQ$，那么 $PD=QC$，$BP=AQ$ 成立吗？
4. 过正方形两条对角线的交点任意作两条互相垂直的直线，即可将正方形分成大小、形状完全相同的四部分，下面是其中的三种分法：



（1）



（2）



（3）

此题有助于学生更好地认识正方形的对称性. 实际上，过对称中心与正方形边上一点的任意一条线，绕对称中心分别旋转90°，180°，270°后，都将正方形分成大小、形状完全相同的四部分（如图（3））.

[1] 如图 6-25，将一张长方形纸对折两次，然后剪下一个角并展开. 怎样剪才能剪出一个正方形?


图 6-25

议一议

满足什么条件的矩形是正方形呢? 满足什么条件的菱形是正方形呢? 说说你的理由，并与同伴交流.

定理　对角线相等的菱形是正方形.
定理　对角线垂直的矩形是正方形.
定理　有一个角是直角的菱形是正方形.

例 2　已知：如图 6-26，在矩形 $ABCD$ 中，BE 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，$BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$. 求证：四边形 $BECF$ 是正方形.

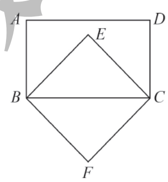


图 6-26

证明：$\because BF /\!/ CE$，$CF /\!/ BE$，
$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是平行四边形.
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，
$\therefore \angle ABC = 90^\circ$，$\angle DCB = 90^\circ$.
又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$，CE 平分 $\angle DCB$，
$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45^\circ$，$\angle ECB = \frac{1}{2}\angle DCB = 45^\circ$.
$\therefore \angle EBC = \angle ECB$.
$\therefore EB = EC$.
$\therefore \square BECF$ 是菱形（菱形的定义）.
在 $\triangle EBC$ 中，
$\because \angle EBC = 45^\circ$，$\angle ECB = 45^\circ$，
$\therefore \angle BEC = 90^\circ$.
$\therefore$ 菱形 $BECF$ 是正方形（有一个角是直角的菱形是正方形）.

第 2 课时研究正方形的判定定理. 教学时，不必要求学生死记结论，而是要引导学生明确这样一个思路：要判定一个四边形是正方形，只要判定它既是菱形又是矩形即可.

[1] 教科书提供了一个剪纸活动，意在引入正方形的判定问题.

这种剪法剪出的一定是菱形（因为四边相等），要想使剪出的菱形是正方形，就需要保证有一个角是直角. 因此，只要确保剪口线与折痕成 45° 角即可剪出一个正方形.

议一议

引导学生讨论正方形的判定方法. 重点并不在于得到几条判定定理，而是要形成判定正方形的基本思路：一个四边形既是矩形又是菱形，这个四边形就是正方形.

例 2

本例是正方形的判定问题. 证明的基本思路是：首先证明四边形 $BECF$ 是平行四边形，然后再证明 $\square BECF$ 是菱形，最后证明菱形 $BECF$ 是正方形. 教学中要给学生充分思考、交流的时间，明确思路，在此基础上再进行证明.

做一做（下页）

在学习完菱形、矩形、正方形的性质和判定之后，教科书设计本环节及下面的“议一议”环节，力图通过研究中点四边形的问题，综合应用菱形、矩形、正方形的性质定理和判定定理.

对于这个问题，学生容易由图形猜出结论，随后的证明也不太困难. 教学时教师也可以在此基

做一做

依次连接任意四边形各边的中点可以得到一个平行四边形，那么，依次连接正方形各边的中点（如图 6-27）能得到一个怎样的图形呢？先猜一猜，再证明.

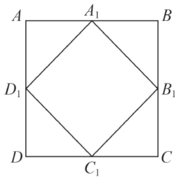


图 6-27

议一议

（1）依次连接菱形或矩形各边的中点能得到一个什么图形？先猜一猜，再证明.

（2）依次连接平行四边形各边的中点呢？

依次连接四边形各边的中点所得到的新四边形的形状与哪些线段有关系？有怎样的关系？

随堂练习

证明：

（1）有一个角是直角的菱形是正方形；

（2）对角线垂直的矩形是正方形.

读一读

四边形的对称性

我们知道，一般的四边形既不一定是轴对称图形，也不一定是中心对称图形；平行四边形都是中心对称图形，却不一定是轴对称图形；等腰梯形是轴对称图形，但不是中心对称图形；筝形是轴对称图形，但不一定是中心对称图形；所有的菱形和矩形既是中心对称图形，又是轴对称图形，而且它们至少都有两条对称轴.（如图 6-28 所示）请你想一想、画一画，什么情况下菱形和矩形只有两条对称轴？什么情况下它们有两条以上的对称轴？

础上，引导学生类比地提出问题，即下面“议一议”的问题，以发展学生发现问题、提出问题的能力.

四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是正方形. 可以证明四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 四边相等，且 $\angle B_1A_1D_1 = 90^\circ$.

议一议

利用类比的方法分别提出了以菱形、矩形以及平行四边形各边中点为顶点所组成图形的形状问题，除了让学生猜测、证明外，还希望学生能进一步分析、概括得到一个一般性的结论：所得的四边形的形状取决于原四边形两条对角线的位置关系和数量关系.

（1）矩形，菱形.

（2）新四边形的形状与原四边形的两条对角线有关. 当原四边形的两条对角线互相垂直时，新四边形是矩形；当原四边形的两条对角线相等时，新四边形是菱形；当原四边形的两条对角线互相垂直且相等时，新四边形是正方形.

随堂练习

证明略. 要求学生根据题意画出图形并写出已知、求证，最后再证明.

通过想象或实际画图，可以发现，当菱形有一个角为直角时，它的对称轴的数量就增加了；当矩形有一组邻边相等时，它的对称轴的数量也增加了. 换句话说，当菱形或矩形成为正方形时，它的对称轴就不止两条了. 由此我们看到，当图形从一般情况向特殊情况变化时，它的对称性也可能随之发生了变化.

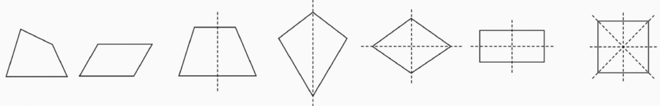


图 6-28

此外，我们还知道，如果把一个图形绕着某一点旋转一定角度（小于360°）后，能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做旋转对称图形. 请你想一想、试一试，平行四边形是旋转对称图形吗？菱形呢？矩形呢？正方形呢？[1]

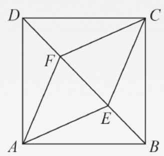
习题 6.8

知识技能

1. 证明：对角线相等的菱形是正方形.

2. 已知：如图，E，F 是正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 上的两点，且 $BE=DF$.

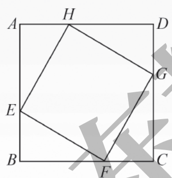
求证：四边形 $AECF$ 是菱形.



（第 2 题）

数学理解

3. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，E，F，G，H 分别在它的四条边上，且 $AE=BF=CG=DH$. 四边形 $EFGH$ 是什么特殊四边形？你是如何判断的？



（第 3 题）

[1] 一般的平行四边形、菱形、矩形都是以180°为旋转角的旋转对称图形，而正方形则是以90°为最小旋转角的旋转对称图形，它们的对称中心都是对角线的交点.

习题6.8

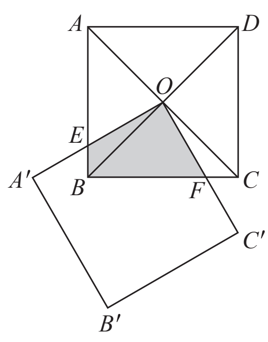
1. 证明略. 要求学生根据题意画出图形，并写出已知、求证，最后再证明.
2. 提示：可以考虑对角线——证明四边形 $AECF$ 的对角线互相垂直平分；也可以考虑边——利用全等三角形证明四边形 $AECF$ 的四条边相等.
3. 四边形 $EFGH$ 是正方形.

   提示：可以证明四边形 $EFGH$ 四条边相等，再证明其中一个角为直角.

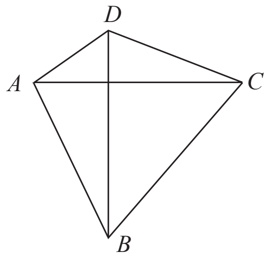
   教学时还可以将本题与本课时“做一做”（教科书图6-27）加以对比，“做一做”实际上是本题的特殊情况.
4. 重叠部分的面积是正方形 $ABCD$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

   提示：如图，证明 $\triangle EBO \cong \triangle FCO$ 即可.

   教学时，还可以引导学生进一步思考：重叠部分的面积与正方形 $A'B'C'O$ 的大小有关吗？将条件中的正方形 $A'B'C'O$ 改成等腰直角三角形 $OA'C'$，或者改成直角三角形 $OA'C'$，结论又如何？更进一步，只要 OA' 与 OC' 满足怎样的关系，结论就保持不变？



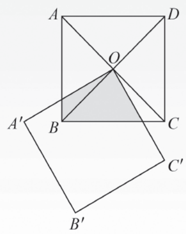
5. 不一定是正方形，四边形的两条对角线若不能互相平分，那么这个四边形就不是平行四边形，更不是正方形. 如图，虽然对角线 $AC = BD$，$AC \perp BD$，但四边形 $ABCD$ 不是正方形.



联系拓广

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，正方形 $A'B'C'O$ 与正方形 $ABCD$ 的边长相等. 在正方形 $A'B'C'O$ 绕点 O 旋转的过程中，两个正方形重叠部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积有什么关系？请证明你的结论.

5. 对角线互相垂直且相等的四边形一定是正方形吗？为什么？



（第 4 题）

回顾与思考

1. 说说平行四边形、菱形、矩形、正方形之间的关系，它们各有哪些性质？
2. 在菱形、矩形、正方形中，哪些图形是轴对称图形？哪些图形是中心对称图形？
3. 分别说说判定一个四边形是菱形、矩形、正方形的条件.
4. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流.

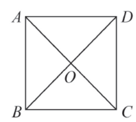
复习题

知识技能

1. 一个菱形的两条对角线的长分别为 4 cm 和 2 cm，求它的边长.

2. 如图，若四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O，且 $OA = OB = OC = OD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$，则四边形 $ABCD$ 是正方形吗？

3. 如果一个四边形是轴对称图形，而且有两条互相垂直的对称轴，那么这个四边形一定是菱形吗？为什么？



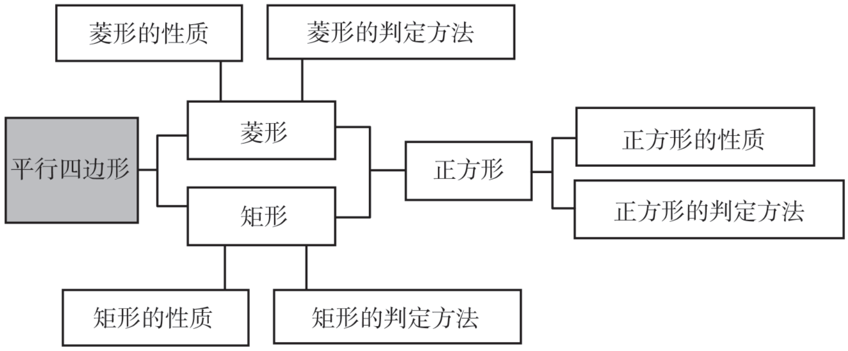
（第 2 题）

回顾与思考

教科书在“回顾与思考”中设立了几个问题，分别说明了本章要掌握和体会的重点内容及方法，希望学生通过对这几个问题的思考，梳理本章的知识内容，总结相关的数学思想方法. 教学时，应鼓励学生带着这些问题回顾所学内容. 在回答这些问题时，教师应关注学生对问题的理解，并开展小组交流和讨论，使学生在知识、技能、经验和思想方法等各方面都有一定程度的提升.

教学时，教师应首先鼓励学生独立思考，要求学生根据自己的理解梳理本章所学内容，然后再组织学生进行展示交流. 对于有困难的学生，教师可进行适当的指导，如以问题串的方式帮助学生总结本章内容，引导学生梳理本章的知识系统.

下面的框图供参考.



在梳理平行四边形与特殊平行四边形之间的关系，以及特殊平行四边形有关性质定理和判定定理的基础上，教师还应鼓励学生自主命制一些典型题目，运用相关知识和方法解决一些问题.

此外，“平行线的有关证明”“三角形的有关证明”“平行四边形”“特殊平行四边形”这四章内容是第三学段几何证明的主要部分. 因此，如有可能，还可以引导学生对这四章内容进行全面的回顾. 教师可以要求学生独立或小组合作完成一份小结，用自己的语言梳理有关内容，从知识、技能、经验、方法等方面总结自己的学习体会和收获，以及存在的问题和需要改进的地方. 教师可以据此了解每一个学生的学习状况，并适时调整自己的教学.

以下典型例题供参考.

例 1 如图 1，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，线段 AD 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 E，F，连接 DE，DF.

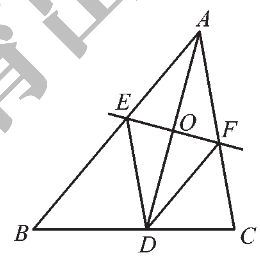


图1

（1）试判断四边形 $AEDF$ 的形状，并证明你的结论；

（2）若 $AE=5$，$AD=8$，求 EF 的长；

（3）$\triangle ABC$ 满足什么条件时，四边形 $AEDF$ 是正方形？请说明理由.

分析： 因为 AD，EF 是四边形 $AEDF$ 的对角线，所以可以考虑从对角线的角度去判断四边形 $AEDF$ 的形状. 可以证明四边形 $AEDF$ 的对角线互相垂直平分，因此四边形 $AEDF$ 是菱形. 在此基础上，根据正方形的判定方法可知，要想使四边形 $AEDF$ 是正方形，还需要 $\angle BAC$ 是直角.

解：（1）四边形 $AEDF$ 是菱形. 证明如下：

$\because$ AD 平分 $\angle BAC$，

$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAD$.

又 $\because$ EF 垂直平分 AD，

$\therefore$ $AO=DO$，$\angle AOE=\angle AOF=90^\circ$.

在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle AOF$ 中，

$\because$ $\angle BAD=\angle CAD$，$AO=AO$，$\angle AOE=\angle AOF$，

$\therefore$ $\triangle AOE \cong \triangle AOF$.

$\therefore EO=FO$.

在四边形 $AEDF$ 中，

$\because AO=DO$，$EO=FO$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

又 $\because AD\perp EF$，

$\therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形.

（2）在菱形 $AEDF$ 中，

$\because AD=8$，

$\therefore AO=4$.

在 Rt△AOE 中，$EO=\sqrt{AE^2-AO^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\therefore EF=2EO=6$.

（3）当△ABC 的 $\angle BAC=90^\circ$ 时，四边形 $AEDF$ 是正方形. 理由如下：

$\because$ 四边形 $AEDF$ 是菱形，且 $\angle BAC=90^\circ$，

$\therefore$ 菱形 $AEDF$ 是正方形.

例 2 如图 2，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 的延长线于点 F. 取 EF 的中点 G，连接 CG，BG.

（1）求证：$\triangle DCG\cong\triangle BEG$；

（2）你能求出 $\angle BDG$ 的度数吗？若能，请写出计算过程；若不能，请说明理由.

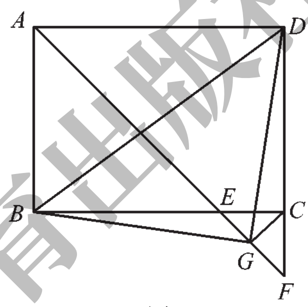


图2

分析： 在矩形 $ABCD$ 中，由 $\angle BAD$ 的角平分线可以联想到 45° 的角，从而可以得到△ABE，△ADF，△ECF 等都是等腰直角三角形，从而为解决问题提供思路.

答案与提示：（1）可以证明 $\angle F=\angle BAF=45^\circ$，于是△$ECF$ 是等腰直角三角形；而 CG 是△ECF 斜边上的中线，所以 $CG=EG$. 在△DCG 和△BEG 中，$DC=AB=BE$，$\angle DCG=\angle BEG=135^\circ$，$CG=EG$，所以△$DCG\cong$△$BEG$.

（2）由△$DCG\cong$△BEG，得 $DG=BG$，$\angle DGC=\angle BGE$，于是 $\angle BGD=\angle EGC=90^\circ$，所以△$BGD$ 为等腰直角三角形，因此 $\angle BDG=45^\circ$.

例 3 如图3，在正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC 和 CD 上的点，AE 与 BF 交于点 G. 现提供三个关系：① $BE=CF$；② $AE=BF$；③ $AE\perp BF$.

（1）从三个关系中选择一个作为条件，剩下的两个作为结论，形成一个真命题，要求写出所有的真命题；

（2）选择其中的一个真命题进行证明.

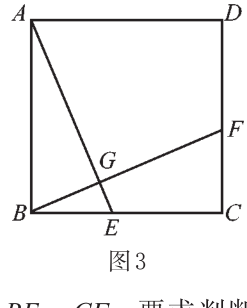


图3

分析： 本例由常规问题改编而来. 在常规问题中，通常是已知 $BE=CF$，要求判断 AE 与 BF 的数量关系和位置关系. 本例实质上是考查△ABE 与△BCF 是否全等，而由正方形的性质可知，$AB=BC$，$\angle ABE=\angle C=90^\circ$，因此要想使△$ABE$ 与△BCF 全等，只需

要再增加一个条件即可. 这里给出的三个关系都可以作为条件：选择①，根据 SAS 可证全等；选择②，根据 HL 可证全等；选择③，根据 ASA 可证全等.

答案与提示：（1）命题一：若① $BE=CF$，则② $AE=BF$，③ $AE\perp BF$；

命题二：若② $AE=BF$，则① $BE=CF$，③ $AE\perp BF$；

命题三：若③ $AE\perp BF$，则① $BE=CF$，② $AE=BF$.

（2）命题一的证明思路：由正方形的性质，得 $AB=BC$，$\angle ABE=\angle C=90^\circ$；又 $BE=CF$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$（SAS），从而 $AE=BF$，$\angle BAE=\angle CBF$；由 $\angle BAE+\angle AEB=90^\circ$，得 $\angle CBF+\angle AEB=90^\circ$，于是 $\angle BGE=90^\circ$，所以 $AE\perp BF$.

命题二的证明思路：由正方形的性质，得 $AB=BC$，$\angle ABE=\angle C=90^\circ$；又 $AE=BF$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$（HL），从而 $BE=CF$，$\angle BAE=\angle CBF$；由 $\angle BAE+\angle AEB=90^\circ$，得 $\angle CBF+\angle AEB=90^\circ$，于是 $\angle BGE=90^\circ$，所以 $AE\perp BF$.

命题三的证明思路：由正方形的性质，得 $AB=BC$，$\angle ABE=\angle C=90^\circ$；又 $AE\perp BF$，所以 $\angle BGE=90^\circ$，于是 $\angle CBF+\angle AEB=90^\circ$，而 $\angle BAE+\angle AEB=90^\circ$，所以 $\angle BAE=\angle CBF$，因此 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$（ASA），故 $AE=BF$，$BE=CF$.

复习题

1. 这个菱形的边长为 $\sqrt{5}$ cm.
   提示：根据菱形的性质可知，菱形的两条对角线将菱形分为四个全等的直角三角形；根据已知条件，每个直角三角形的两条直角边分别为 2 cm 和 4 cm. 利用勾股定理，可求得这个菱形的边长为 $2\sqrt{5}$ cm.
2. 四边形 $ABCD$ 是正方形.
   提示：由四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，可知它是平行四边形；由 ▱$ABCD$ 的对角线相等，可知它是矩形；利用勾股定理的逆定理，可知 $\angle AOB=90^\circ$，于是 $AC\perp BD$，所以矩形 $ABCD$ 是正方形.
3. 这个四边形不一定是菱形，也可以是矩形.

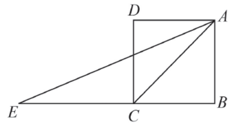
4. 一个菱形的周长是 200 cm，一条对角线长 60 cm，求：

（1）另一条对角线的长度；

（2）菱形的面积.

5. 证明：如果四边形两条对角线垂直且相等，那么依次连接它的四边中点得到一个正方形.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 是一个正方形，E 是 BC 延长线上一点，且 $AC=EC$，求 $\angle DAE$ 的度数.



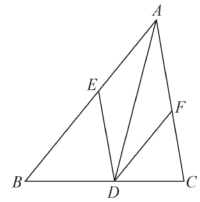
（第 6 题）

7.（1）如果一个菱形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个菱形是正方形吗？为什么？

（2）如果一个四边形绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，那么这个四边形是正方形吗？为什么？

8. 已知：如图，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，过点 D 分别作 AC 和 AB 的平行线，交 AB 于点 E，交 AC 于点 F.

求证：四边形 $AEDF$ 是菱形.



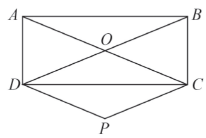
（第 8 题）

9. 已知：$\triangle ABC$ 的两条高分别为 BE，CF，点 M 为 BC 的中点.

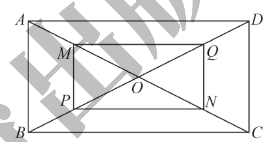
求证：$ME=MF$.

10. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，过点 C 作 BD 的平行线，过点 D 作 AC 的平行线，两线相交于点 P.

求证：四边形 $CODP$ 是菱形.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 已知：如图，在矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，点 M，P，N，Q 分别在 AO，BO，CO，DO 上，且 $AM=BP=CN=DQ$.

求证：四边形 $MPNQ$ 是矩形.

12. 已知：如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，CD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$DE\perp BC$，$DF\perp AC$，垂足分别为点 E，F.

求证：四边形 $CEDF$ 是正方形.

4.（1）80 cm；

（2）2 400 cm^2.

提示：菱形的两条对角线将菱形分为四个全等的直角三角形，根据已知条件，直角三角形的斜边长为 50 cm，一条直角边长为 30 cm，利用勾股定理可求得另一条直角边的长，从而求得菱形的另一条对角线；菱形的面积等于其对角线乘积的一半.

5. 提示：利用三角形中位线定理，由原四边形的两条对角线相等，可证新四边形的四条边相等；由原四边形的两条对角线互相垂直，可证新四边形的两邻边垂直.

6. $\angle DAE=22.5°$.

提示：可证 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ACB=45°$；再证 $\triangle ACE$ 是等腰三角形，于是 $\angle AEC=22.5°$；由 $AD\,/\!/\,BC$，得 $\angle DAE=\angle AEC=22.5°$.

7.（1）是正方形，菱形的对角线互相平分且垂直，绕对角线的交点旋转 90° 后，所得图形与原来的图形重合，说明菱形的对角线相等；

（2）是正方形，对角线将四边形分成四部分，而满足条件的四边形这四个部分必然全等（因为可以相互旋转而得到），因此四边形的四条边相等，对角线互相垂直平分且相等.

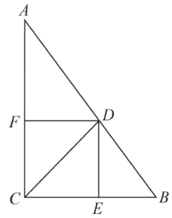
8. 提示：先证明四边形 $AEDF$ 是平行四边形，再证明 $\angle EAD=\angle EDA$，于是 $EA=ED$.

9. 提示：利用“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”可证 $ME=\frac{1}{2}BC$，$MF=\frac{1}{2}BC$.

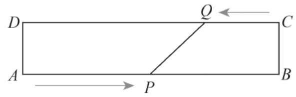
10. 提示：先证明四边形 $CODP$ 是平行四边形，再由矩形的对角线相等且互相平分证明 $OC=OD$.

11. 提示：考虑对角线，证明四边形 $MPNQ$ 的对角线互相平分，而且相等.

12. 提示：先证明四边形 $CEDF$ 是矩形，再证明有一组邻边相等.



（第 12 题）

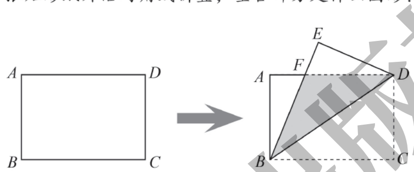


（第 13 题）

※**13.** 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB = 20$ cm. 动点 P 从点 A 开始沿 AB 边以 4 cm/s 的速度运动，动点 Q 从点 C 开始沿 CD 边以 1 cm/s 的速度运动；点 P 和点 Q 同时出发，当其中一点到达终点时，另一点也随之停止运动. 设动点的运动时间为 t s，则当 t 为何值时，四边形 $APQD$ 是矩形？

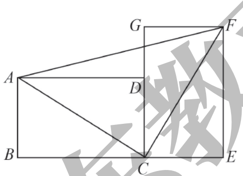
数学理解

14. 如图，把一张矩形纸片沿对角线折叠，重合部分是什么图形？试说明理由.

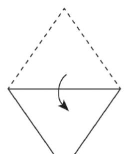


（第 14 题）

15. 如图，把两个大小完全相同的矩形拼成“L”形图案，求 $\angle ACF$，$\angle AFC$ 的度数.



（第 15 题）



（第 16 题）

16. 小颖在商店里看到一块漂亮的方纱巾，非常想买，但当她拿起来时，又感觉纱巾不是正方形. 商店老板看她犹豫的样子，马上过来将纱巾沿对角线对折，让小颖检验（如图）. 小颖还是有些疑惑，老板又将纱巾沿另一条对角线对折，让小颖检验. 小颖发现这两次对折后两个对角都能对齐，于是买下这块纱巾. 你认为小颖买的这块纱巾一定是正方形吗？你认为用什么方法可以检验纱巾是不是正方形？

13. $t = 4$ s 时，四边形 $APQD$ 是矩形.

14. 重合部分是等腰三角形.

提示：由折叠过程可知 $\triangle DCB \cong \triangle DEB$，

于是 $\angle DBC = \angle DBF$；

由 $AD \parallel BC$，得 $\angle ADB = \angle DBC$；所以 $\angle ADB = \angle DBF$，所以 $FB = FD$.

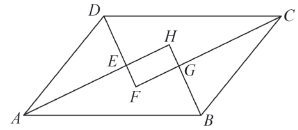
15. $\angle ACF = 90^\circ$，$\angle AFC = 45^\circ$.

提示：证明 $\triangle ACF$ 是等腰直角三角形.

16. 不能认为小颖买的这块纱巾一定是正方形，实际上菱形也满足要求. 如要判断这块纱巾是否为正方形，还需要检验对角线是否相等.

17. 已知：如图，▱$ABCD$ 各角的平分线分别相交于点 E，F，G，H.

求证：四边形 $EFGH$ 是矩形.



（第 17 题）

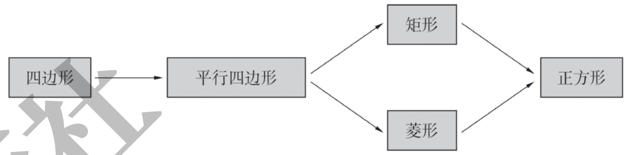
问题解决

18. 你能通过剪切和拼接下列图形得到一个矩形吗？在这些剪拼的过程中，剪下的图形是经过怎样的运动最后拼接在一起的？

（1）平行四边形；　　（2）三角形.

联系拓广

19. 将相应的条件填在相应的箭头上，使得下图能清楚地表达几种四边形之间的关系.



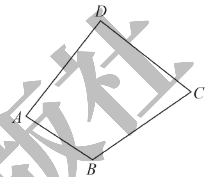
（第 19 题）

20. 已知两条对角线，利用尺规作一个菱形.

※**21.** 如图，画一个矩形 $EFGH$，并满足下列条件：

（1）点 A，B，C，D 分别在矩形 $EFGH$ 的四条边上；

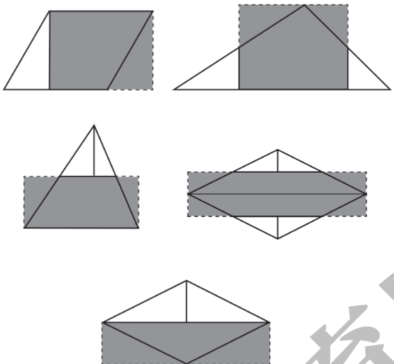
（2）$S_{矩形EFGH}=2S_{四边形ABCD}$.



（第 21 题）

17. 提示：可以证明四边形 $EFGH$ 的三个角是直角.

18. 本题以图形变化为题材，可以较好地考查学生对图形关系的把握能力，以及运用图形的变化解决问题的能力. 具体的剪拼方法不唯一，例如：



教学时，还可以让学有余力的学生思考一般四边形的剪拼方法. 学生如能连接对角线将其分解为两个三角形，问题就转化为三角形的问题了，因而这也可以考查学生的化归意识.

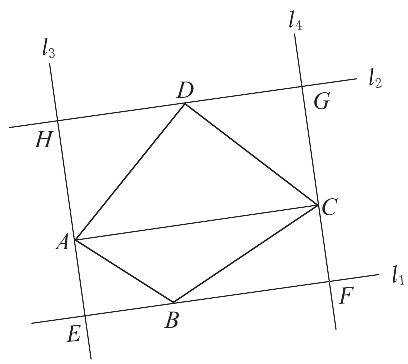
19. 略.

20. 提示：先作其中一条对角线，再作这条对角线的垂直平分线.

21. 画法如下：（1）连接 AC（或 BD）；

（2）分别过点 B，D 画 AC 的平行线 l_1，l_2；

（3）分别过点 A，C 画 l_1 的垂线 l_3，l_4，则 l_1，l_4，l_2，l_3 围成的四边形即是满足条件的矩形 $EFGH$.（如图）



附录　典型案例评析

菱形的性质与判定（第1课时）

设计：江西省九江市同文中学　高　峻
评析：北京市第二中学亦庄分校　焦艳玲

一、教学内容分析

“特殊平行四边形”一章是在平行四边形的性质和判定的基础上，进一步对特殊平行四边形的性质和判定的探究与证明.本章知识既是前面所学知识的延续和拓展，也为今后学习其他平面图形作必要的知识储备.本章主要研究菱形、矩形、正方形的性质和判定，教科书的设计是先探究，再对探究得到的结论进行证明.本节课是“菱形的性质与判定”的第1课时，主要研究菱形的性质.

二、学情分析

学生在此前已经探索并证明了平行四边形的性质定理和判定定理，因此学生已具备一定的研究经验，这是有利的一面.菱形是特殊的平行四边形，所以具有平行四边形的一切性质，因此对菱形性质的学习，就要从已学过的平行四边形的性质和自身的特殊性入手.由于平行四边形的学习是在八年级上册，而本章是八年级下册的第一节，学生经过一个假期的休息，对平行四边形的内容有一定的遗忘.因而，通过预习与复习巩固已学习的平行四边形的性质，从而为本课时的学习打好基础.

由于八年级的学生对事物的感性认识丰富，且正在向抽象思维转型，所以本节课让学生在丰富的实践活动中，利用菱形的性质解决问题，促使学生从感性认识向理性思维发展，从形象思维向抽象思维转型.

三、教学目标

1.经历研究菱形性质的探索、发现、猜想、证明的过程，进一步发展合情推理和演绎推理能力.

2.认识菱形，掌握菱形的性质.

3.能够用综合法证明菱形的性质定理.

4.进一步体会证明的必要性，以及计算与证明在解决问题中的作用.

四、教学重点和难点分析

重点：菱形性质的探索与证明.

难点：引导学生探究菱形的性质,并利用菱形的性质解决实际问题.

五、教学策略分析

基于对教科书和学生认知规律的考虑，在讲授新课时，首先引导学生回顾平行四边形的性质，然后引导学生思考菱形与平行四边形的关系，从而得到菱形具有平行四边形的所有性质；通过活动观察菱形的特殊性，从轴对称性出发得到菱形的特殊性质，再进行演绎证明；最后利用性质解决问题，使学生对菱形性质有更深入的理解与掌握.

为了充分尊重学生，体现学生的主体地位，本节课将充分发挥自主学习与合作学习的优势，让每个学生都活动起来，参与到整个教学中去. 同时把时间留给学生，让他们有足够的思考时间和充分的表达机会.

六、教学过程

【第一环节】知识回顾——复习提问

在八年级上学期，我们学习了平行四边形，那么什么样的四边形是平行四边形呢？它有哪些性质呢？

引导学生从以下方面思考总结：

从对称性看：平行四边形是中心对称图形，对称中心是对角线的交点；

从边看：对边平行且相等；

从角看：对角相等，相邻的两个角互补；

从对角线看：对角线互相平分.

设计意图：本环节旨在通过提问，复习并梳理平行四边形的性质，为菱形性质的学习做铺垫：菱形是否具有这些性质？研究菱形的性质，是否也可以从这四个方面来探索？由于本环节内容比较容易，所以教学中可以提问基础相对比较薄弱的学生.

【第二环节】新课引入——认识菱形

给出一组含有菱形的生活图片，学生在欣赏图片的过程中发现特殊的平行四边形——菱形.

定义：有一组邻边相等的平行四边形叫做菱形.

想一想：举出一些生活中菱形的例子.

设计意图：此环节使用了教科书的引入，从观察入手，前两幅图中含有菱形，特别是第二幅图中含有正方形也是菱形的意图，可以利用第三幅图通过测量比较，发现邻边相等的特征，从而引出菱形的定义. 由于给出的图形是静态的，所以可以让学生列举出一些生活中的动态菱形的例子，如菱形衣帽架、电动门等.

【第三环节】重点探索——菱形的性质

想一想：菱形是特殊的平行四边形，它具有一般平行四边形的所有性质. 你能列举一些这样的性质吗？

从对称性看：是中心对称图形；

从边看：对边平行且相等；

从角看：对角相等，相邻的两个角互补；

从对角线看：对角线互相平分.

进一步思考：菱形还有哪些特殊性质？

设计意图：通过“想一想”，让学生复习回顾菱形所具有的平行四边形的性质，强化思考问题的四个角度. 在此基础上，引导学生重点思考菱形的特殊性.

做一做：用菱形纸片折一折，回答下列问题：

菱形是轴对称图形吗？如果是，它有几条对称轴？对称轴之间有什么位置关系？

通过对折，我们发现菱形是轴对称图形，两条对角线所在的直线就是它的对称轴.

如图 1，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O. 通过对折，你还发现了什么结论？

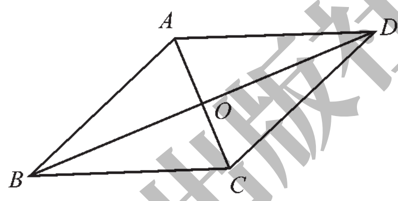


图1

从边看：四边相等，即 $AB=BC=CD=AD$；

从角看：对角线平分每对内角，即 $\angle ABD=\angle CBD=\angle ADB=\angle CDB$，$\angle BAC=\angle DAC=\angle BCA=\angle DCA$；

从对角线看：对角线垂直，即 $AC\perp BD$；

从三角形形状看：等腰三角形有 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle BAD$，$\triangle BCD$；直角三角形有 $\triangle OAB$，$\triangle OCB$，$\triangle OCD$，$\triangle OAD$.

设计意图：平行四边形的许多性质都与它的中心对称性有关，而菱形不仅是中心对称图形，而且还是轴对称图形. 因此，菱形的特殊性质与它的轴对称性有关. 通过折纸活动，可以让学生发现邻边的关系、对角线的关系，甚至对角线与内角的关系，从而加深学生对菱形特性的认识.

【第四环节】演绎证明——菱形的性质定理

探索的结论“菱形的四条边相等，对角线互相垂直”是否正确呢？我们必须加以证明，那么证明的环节有哪些？如何证明这两个性质呢？请同学们先思考.

在学生思考、交流的基础上，展示证明过程.

已知：如图2，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，对角线 AC 与 BD 相交于点 O.

求证：（1）$AB=BC=CD=AD$；（2）$AC\perp BD$.

证明：（1）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$.

又 $\because AB=AD$，

$\therefore AB=BC=CD=AD$.

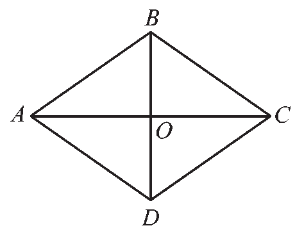


图2

（2）$\because AB = AD$，

$\therefore$ $\triangle ABD$ 是等腰三角形.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore BO = OD$.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because BO = OD$，

$\therefore AO \perp BD$，

即 $AC \perp BD$.

由此我们得到了菱形的两个性质定理：

定理：菱形的四条边都相等.

定理：菱形的对角线互相垂直.

设计意图：通过探究得到的猜想，只有通过严谨的证明，才能成为定理，才能用来解决其他问题. 教学中，定理的证明也可以让学生自己完成，再与教科书中的过程对比. 无论采用哪种方式，都应鼓励学生先独立思考、分析证明思路.

【第五环节】实践出真知——菱形性质的应用

例 如图 3，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O，$\angle BAD = 60^\circ$，$BD = 6$. 求 AB 和 AC 的长.

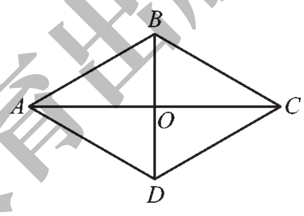


图3

解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB = AD$（菱形的四条边都相等），

$AC \perp BD$（菱形的对角线互相垂直），

$OB = OD = \frac{1}{2} BD = 3$（菱形的对角线互相平分）.

在等腰三角形 ABD 中，

$\because \angle BAD = 60^\circ$，

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形.

$\therefore AB = BD = 6$.

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，由勾股定理得

$OA^2 + OB^2 = AB^2$，

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.

$\therefore AC = 2OA = 6\sqrt{3}$（菱形的对角线互相平分）.

设计意图：对于菱形及其性质的学习，学生经历了认识概念、探究性质、证明结论、应用结论这几个环节. 在后面的学习中，学生将继续经历这样的过程. 因为初学性质的应用，所以选用的例题和练习不宜过难.

【第六环节】巩固练习

1. 菱形具有而平行四边形不一定具有的性质是________和________.

2. 教科书随堂练习.

【第七环节】复习与小结

本节课我们认识了特殊的平行四边形——菱形，它具有平行四边形的所有性质，同时我们一起探索了它的特殊性质，并对探索的性质进行了证明. 初步掌握了“菱形的四条边都相等”“菱形的对角线互相垂直”这两个定理.

【第八环节】课后作业——巩固练习

必做题：教科书习题6.1.

选做题：如图4，在边长为6的菱形$ABCD$中，$\angle DAB=60^\circ$，F是AD上的动点，E是CD上的动点，满足$AF+CE=6$. 求证：不论E，F怎样移动，$\triangle BEF$总是等边三角形.

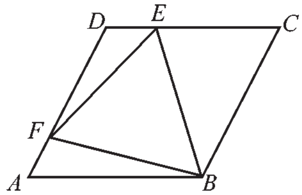


图4

设计意图：通过必做题，可以让学生发现问题，及时查缺补漏；选做题的设计意图是巩固提高，使各层次的学生得到不同的发展.

七、案例评析

高老师的教学设计基于对教科书和学生认知规律的考虑，通过引导学生回顾平行四边形的性质，思考菱形与平行四边形的关系，从而得到菱形具有平行四边形的所有性质；通过活动观察菱形的特殊性，从轴对称性出发得到菱形的特殊性质，再进行演绎证明，最后利用性质解决问题，使学生对菱形性质有更深入的理解与掌握.

整个设计思路是在学生已有的知识体系中，借助特殊与一般、合情推理与演绎推理等逐渐将新知识构建在学生的知识网络中，通过知识间彼此的紧密联系达到对旧知识的再现及新知识的学习的目的. 教学设计从宏观的角度反映了教师既见树木又见森林的课程观及教学观.

本案例的另一个特点是设计了相对丰富的教学活动，如观察图片、折纸实验、推理证明、练习巩固等，多角度地调动学生学习的主动性，进而加深学生对菱形性质的认识. 教学设计中，教师注重证明的运用，体现了《标准》对发展学生演绎推理能力的要求.

第七章　二次根式

一、《标准》要求

了解二次根式、最简二次根式的概念，了解二次根式（根号下仅限于数）的加、减、乘、除运算法则，会用它们进行有关的简单四则运算.

二、教学目标

1. 经历探索二次根式的性质以及有关运算法则的过程，理解二次根式的有关运算的算理，进一步发展观察、操作、概括等能力，发展有条理的思考能力以及语言表达能力.

2. 了解二次根式、最简二次根式、同类二次根式的概念，会辨别最简二次根式和同类二次根式，理解二次根式的性质.

3. 能熟练地进行二次根式的化简和二次根式的加、减、乘、除四则运算.

4. 能利用二次根式的知识解决实际问题，在解决问题的过程中体会数学的应用价值.

三、设计思路

在六年级下册的学习中，学生已经掌握了整式的有关运算等内容；在七年级上册的学习中，学生掌握了勾股定理、平方根、立方根、实数的概念以及实数的简单运算与应用等内容. 本章在学生已有知识的基础上，对式进行扩张，引入二次根式，将整式扩充到根式，使学生对式有进一步的认识.

本章的主要内容是二次根式的性质与运算. 本章自始至终围绕着二次根式的化简与运算问题，由浅入深地讲解二次根式的有关概念及性质，从而帮助学生更好地掌握二次根式化简与运算的方法.

在学生已有知识的基础上，教科书首先通过观察、操作、归纳、类比等方法，给出了二次根式的概念. 接着介绍二次根式的性质，包括一个非负数的平方的算术平方根的性质、积的算术平方根和商的算术平方根的性质. 由这些知识引出简单的二次根式的化简方法，并归纳出最简二次根式的概念. 接下来，引入二次根式的加法和减法，由两个引例归纳出了同类二次根式的概念，给出了二次根式加减的方法. 然后，在积的算术平方根和商的算术平方根性质的基础上，引出了二次根式的乘法和除法. 最后，在二次根式四则运算的基础上，讲述二次根式的简单混合运算. 这样的设计思路符合学生的认知基础，也符合有关知识之间的内在联系.

本章在呈现方式上力求突出：二次根式及其运算产生的实际背景——使学生经历实际问题数学化的过程，初步培养学生的数学建模能力；有关运算法则的探索过程——为探索有关运算法则设置了观察、操作、思考等活动；对算理的理解和基本运算技能的掌握——

设置恰当数量和难度的运算题，同时使学生明确运算的依据. 本章的重点是二次根式的化简与运算方法，关键是正确了解与运用二次根式的概念与性质；学习二次根式的有关概念与性质,直接目的就是为了熟练地掌握二次根式的化简与运算. 二次根式在初中阶段的应用，也主要是它的化简与运算方法. 本章的难点主要是正确理解与运用二次根式的性质.

学习本章内容，应注意随时复习有理数及整式运算的有关内容，这是学好本章的关键之一.

四、课时安排建议

1　二次根式	1课时
2　二次根式的性质	2课时
3　二次根式的加减	1课时
4　二次根式的乘除	2课时
回顾与思考	1课时

五、教学建议

二次根式的概念及性质是建立在七年级上册“实数”的基础上的，而本章的重点——二次根式的运算，既与实数及二次根式的概念、性质有关，又与学生已经学过的整式、分式的基本运算有着紧密的联系. 整式、分式的运算是二次根式运算的重要基础；反过来，通过二次根式运算的学习，又复习和巩固了整式、分式运算的知识和技能. 这部分内容，一方面适当配合勾股定理及其应用的学习，另一方面为学习“一元二次方程”等后继内容打下必要的基础. 进一步，由二次根式的概念、性质和运算，不难推广到 n 次根式并派生出分数指数幂的有关知识. n 次根式的内容在初中不讲，将来在高中学习函数时再继续学习. 二次根式的有关内容无论在今后学习指数函数、对数函数、三角函数、立体几何、解析几何及微积分等数学内容中，还是在学习物理等其他课程中都有着广泛的应用.

1. 注重概念的形成过程，让学生在概念形成过程中，逐步理解所学的概念.

概念是由具体到抽象、由特殊到一般，经过分析、综合，去掉非本质特征，保持本质属性而形成的. 概念的形成过程是思维过程，加强概念形成过程的教学，对提高学生的思维水平是很有必要的. 如二次根式的引入，要让学生结合具体问题情境，亲身经历活动，感受引入的必要性. 教学时，教师可多提一些具体的问题，旨在引起学生的思考，让学生从具体的例子中抽象出初步的二次根式概念. 教师要不时鼓励学生动手、动脑、动口，与同伴进行合作，并充分展开交流.

2. 注重对二次根式的性质与运算法则的探索过程以及算理的理解，发展有条理的思考能力与表达能力.

本章为学生探索二次根式的性质与运算法则提供了较为丰富的素材，教学中不要简单地要求学生记忆二次根式的性质与四则运算法则，而要关注学生对性质、法则的探索过程. 同时要重视学生对算理的理解，有意识地培养学生有条理的思考能力和语言表达能力. 教

学中要让学生经历从具体问题到一般规律的探索过程，展开充分的探索与交流，并鼓励学生用自己的语言清楚地表达.

3. 注重发展学生的推理能力.

教学中，教师应有意识地培养学生的推理能力，鼓励学生通过合情推理进行大胆推测，利用所学知识猜测、验证有关结论，同时鼓励学生有条理地表达自己的思考过程. 例如教科书“复习题”数学理解中的第 9、10 题的教学，教师应鼓励学生经历根据特例进行归纳、建立猜想、用符号表示并加以证明这一重要的获得数学结论的过程.

4. 保证基本的运算技能，避免繁杂的运算.

掌握基本运算技能是学生学习本章内容的一个重要目标. 教学中，教师要适当地、分阶段地提供一些必要的练习让学生进行训练，使学生能准确地进行基本的符号运算，并能明白每一步的算理. 教学中要避免过多、繁琐的运算，如对于二次根式的加、减、乘、除运算，不要求学生进行复杂的混合运算，只要求能够利用有关的乘法公式进行运算即可.

六、 评价建议

1. 关注学生对简单二次根式运算的理解水平.

对计算的评价不能过分要求技巧，要遵循教科书的要求，避免繁杂的运算. 应关注学生对二次根式的性质与运算法则的理解：能否根据具体问题的特点选择合理、简便的算法，能否依据算理正确地进行运算，能否确认运算结果的合理性等.

2. 重视考查学生的分析、概括、交流的能力.

本章为学生提供了丰富的活动，如观察、操作、猜测、推理等，教师应在活动中注意观察学生的表现，如是否积极主动地参与活动，能否独立思考并与同伴交流，能否利用数学语言有条理地表达自己的思想过程，能否从具体问题中进行抽象、概括等，并将这些考查与书面考试结合起来.