

义务教育教科书 (五·四学制)

数学

七年级 下册

教师教学用书

山东教育出版社

出版说明

为了更好地满足义务教育教学的需求，山东教育出版社等单位受山东省教育厅委托，以教育部审查通过的义务教育教科书为基础，改编出版了一套适合五四分段教学使用的义务教育教科书。本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》，配合山东教育出版社《义务教育教科书（五四学制）·数学》（七年级下册）编写而成，供教师教学时参考使用。

本书力求体现义务教育课程标准精神和教科书的编写意图；从教师教学实际出发，既有利于教师更好地把握教科书的内容，解决备课中的实际困难，又留给教师一定独立发挥、独立钻研教科书的个性空间；根据素质教育的要求，在每一教学环节都注重体现对学生进行知识与能力、思想与方法、情感态度与价值观的培养；注意吸收数学教育教学的最新研究成果；符合五四分段教学实际，体现五四学制教育特色。

本书是在北京师范大学出版社出版的《义务教育教科书·数学教师教学用书》（八年级上册）的基础上改编而成的。参加本书改编的人员是韩际清、王德刚、云鹏、柳圣明、刘崇渭、陈杰、赵水祥、辛珍文，由马复、韩际清主编。

欢迎广大教师在使用过程中提出修改意见和建议，以利于本书的不断改进和完善。

山东教育出版社

目 录

第七章 二元一次方程组

1 二元一次方程组	6 (2)
2 解二元一次方程组	10 (6)
3 二元一次方程组的应用	17 (13)
4 二元一次方程与一次函数	25 (19)
*5 三元一次方程组	30 (24)
回顾与思考	35 (28)
复习题	36 (28)

综合与实践

◀哪一款“套餐”更合适	46 (31)
-------------	---------

第八章 平行线的有关证明

1 定义与命题	59 (34)
2 证明的必要性	63 (38)
3 基本事实与定理	66 (41)

4 平行线的判定定理	70 (45)
------------	-----------

5 平行线的性质定理	74 (48)
------------	-----------

6 三角形内角和定理	77 (51)
------------	-----------

回顾与思考	87 (60)
-------	-----------

复习题	89 (60)
-----	-----------

第九章 概率初步

1 感受可能性	101 (66)
---------	------------

2 频率的稳定性	106 (70)
----------	------------

3 等可能事件的概率	114 (77)
------------	------------

回顾与思考	126 (87)
-------	------------

复习题	128 (87)
-----	------------

第十章 三角形的有关证明

1 全等三角形	141 (92)
---------	------------

2 等腰三角形	149 (100)
---------	-------------

3 直角三角形	162 (111)
---------	-------------

4 线段的垂直平分线	169 (118)
------------	-------------

5 角平分线	177 (125)
--------	-------------

回顾与思考 184 (131)

复习题 188 (131)

第十一章 一元一次不等式与一元一次不等式组

1 不等关系 204 (136)

2 不等式的基本性质 208 (139)

3 不等式的解集 211 (141)

4 一元一次不等式 214 (143)

5 一元一次不等式与一次函数 220 (147)

6 一元一次不等式组 226 (151)

回顾与思考 234 (158)

复习题 236 (158)

综合与实践

生活中的“一次模型” 243 (161)

总复习题 252 (162)

注：括号内页码系教科书的页码.

编者的话

本书依据《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《标准》），配合山东教育出版社相应的五四学制《义务教育教科书·数学》编辑而成，供教师从事教学时参考。

一、教科书特点

为了实现《标准》的课程目标，教科书力图突出如下特点：

为学生的数学学习构筑起点. 为了使每个学生都能够在数学学习过程中获得最适合自己的发展，教科书提供了大量数学活动的线索，作为所有学生从事数学学习的出发点. 学生在教科书所提供的学习情境中，通过探索与交流等活动，获得必要的发展，达到《标准》所设立的课程目标.

向学生提供现实、有趣、富有挑战性的学习素材. 数学知识的学习，大都力求从学生实际出发，用他们熟悉或感兴趣的问题情境引出学习主题，并提供众多有趣而富有数学含义的问题，以展开数学探究. 这将有助于展现数学与现实及其他学科的联系，突出“数学化”的过程.

为学生提供探索、交流的时间与空间. 有意义的数学学习不能单纯依赖模仿与记忆，动手实践、自主探索与合作交流也是重要的数学学习方式. 为此，教科书在提供学习素材的同时，还依据学生已有的知识背景和活动经验，提供了大量的操作、思考与交流的机会，如提出了大量富有启发性的问题，设立了“做一做”“想一想”“议一议”等栏目，以使学生通过自主探索与合作交流，形成新的知识，包括归纳法则与方法、描述概念等. 章后的回顾与思考、总复习也以问题的形式出现，以帮助学生通过思考与交流，梳理所学的知识，建立符合个体认知特点的知识结构.

展现数学知识的形成与应用过程. 经历知识的形成与应用过程，将有利于学生更好地理解数学、应用数学，增强学好数学的信心. 因此，教科书力图采用“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的模式展开. 所有新知识的学习都以对相关情境的研究作为开始，它们是学生了解与学习这些知识的有效切入点. 随后，通过对一个个问题的研讨，逐步展开相应内容的学习，这些有助于学生经历真正的“做数学”和“用数学”的过程，并在此过程中逐步发展数感、符号感、空间观念、统计观念、应用意识和推理能力等.

满足不同学生的发展需求. 教科书在保证基本要求的同时，也为有更多数学学习需求的学生提供了有效的途径.“读一读”栏目提供了有关的数学史料或背景知识、数学在现

实世界和科学技术中的应用实例、有趣的或有挑战性的问题讨论、有关数学知识延伸的介绍等，目的在于给这些学生以更多了解数学、研究数学的机会。教科书中的习题分为两类：一类面向全体学生，为他们熟悉、巩固新学的内容，加深对相关知识和方法的理解所设；另一类带“※”的题目则面向有特殊数学学习需求的学生，不要求全体学生都尝试去完成它们。

二、教学活动

数学教学是数学活动的教学，是师生交往、互动、共同发展的过程。学生是数学学习的主人，教师是学生从事数学学习的组织者、引导者和合作者。有效的数学教学应当从学生的生活经验和已有的知识背景出发，向他们提供充分的从事数学活动的机会，在活动中激发学生的学习潜能，促使他们在自主探索与合作交流的过程中真正理解和掌握基本的数学知识、技能及数学思想方法，获得广泛的数学活动经验，提高解决问题的能力，学会学习。同时使学生在意志力、自信心、理性精神等情感与态度方面得到良好的发展。

教学活动中，教师应根据学生实际，创造性地使用教科书，积极开发和利用各种教学资源，为学生提供丰富多彩的学习素材，让学生经历数学知识的形成与应用过程；要关注学生的个体差异，有效地实施有差异的教学，使每个学生都得到充分的发展；应根据学生的认知特征和所学知识的特征，灵活采用多种教学形式，促进学生有效地学习；应要求学生在数学学习的过程中充分借助计算器（有条件的地区鼓励学生使用计算机），培养他们运用现代信息技术解决实际问题的意识和能力，使他们能够借助新技术去学习数学、解决较为现实的问题，并免于从事大量繁杂、重复的机械性操作活动，而把更多的精力投入到有意义的探索性活动中去。

教师在教学中要尽可能多地使用不同的教学媒体，包括模型、挂图、投影片、录音（像）带、软件等，以丰富学生感知认识对象的途径，促使他们更加乐意接近数学、更好地理解数学、在数学学习上获得更多的成功。

三、学习评价

评价的目的是全面了解学生的学习状况，激励学生的学习热情，促进学生的全面发展。评价也是教师反思和改进教学的有力手段。

对学生数学学习的评价，应全面反映学生的学习状况。首先要关注对学生学习过程的评价，包括学生参与活动的程度和行为表现、合作交流的意识 and 能力等。对学生数学思维过程的评价，不仅要关注学生是否能积极主动地独立思考，而且要关注他们在学习过程中表现出来的数学思维策略、水平和思维品质。对学生解决问题能力的评价，包括考查他们

能否结合具体情境提出数学问题；能否尝试从不同角度分析和解决问题；能否与他人合作解决问题；能否清楚地表达解决问题的过程，并解释结果的合理性；能否对解决问题的过程进行反思，并获得解决问题的经验。对学生情感与态度的评价，应结合具体的教学过程和问题情境，随时了解他们学习数学的主动性、自信心、对数学活动的兴趣和应用数学知识解决问题的意识。对学生掌握基础知识和基本技能状况的评价，应着重考查学生对知识与技能的理解和运用，而不是对知识的机械记忆和过分的技巧性要求。应当强调的是，《标准》所列的教学目标是本学段结束时学生应达到的目标，不能要求每一个学生在相应内容学习之后立即达到，应允许他们经过一段时间的努力和知识、技能与经验的积累而逐步达到。

要采用多样化的评价方式，如书面考试、口试、作业分析、课堂观察、课后访谈、建立数学成长记录、撰写小论文和活动报告等，准确了解学生的数学学习状况。在采用书面考试时，教师要按照《标准》的要求，控制考试难度及次数，控制客观题型的比例，避免偏题、怪题和死记硬背的题目。对于综合与实践，学生需要一定的操作和思考时间，还需要和同伴进行讨论与交流，很难在一次书面测验中完成。因此，教师应注重评价学生综合与实践学习的过程，不宜把它纳入到书面考试（测验）的范围之中。

在呈现评价结果时，应重视定性评价的作用，采用定性定量相结合的方法。定性评价可采用评语的形式，更多地关注学生已经掌握了什么，有哪些进步，具备了什么能力，还需要在哪些方面努力等，以使评价结果有利于学生树立学习数学的自信心，提高学生学习数学的兴趣，促进学生的全面发展。

四、几点说明

1. 教科书体例

本版教科书以学生的学习活动为出发点，即将教科书首先视为学生学习的“学材”。教科书体例以“章”为一个基本单位，不同章之间的体例并无明显区别。每一章的基本体例如下：

（1）章首页。包括：本章名称、本章主题图、本章引言、本章学习目标。

（2）若干节。每一节大致包括：

——节名称。

——问题情境：以学生自身和周围环境中的自然现象、社会生活、数学或其他学科中的问题为知识学习的切入点，突出数学与现实世界、其他学科之间的联系，以及知识产生的由来，引发学生的学习欲望，并引导他们的思维指向将要学习的新知识。

——问题串：由浅入深，提出一系列有思维层次或不同理解深度的问题，力图使每一

位学生都能投入到学习活动中，不同的学生有不同的收获。

——数学活动：依据学生已有的知识背景和活动经验，针对相应学习主题，向学生提供以自主探索、合作交流等方式进行的主动式学习活动，包括“做一做”“想一想”“议一议”等。

——思考与整理：让学生经历归纳、概括等过程，提炼出上述活动中的数学学习对象，并用自己熟悉的方式、语言及数学符号去表达。

——明晰：以较为规范的形式表达主要的数学对象（如重要的结论、术语、概念、法则等）。

——例题：直接联系所学内容的基础性问题。

——随堂练习：与先前的数学活动或例题关联的基本问题。

——读一读：与学习主题密切相关的数学史实、现实中的数学应用介绍文章或趣味性小品文。每章至少有一篇。

——习题。横向分为：知识技能、数学理解、问题解决、联系拓广；纵向分为：一般性问题、尝试性问题（以“※”标记）。

（3）章后小结：回顾与思考。以设问的方式，让学生通过思考与交流，梳理所学的知识，建立符合个体认知特点的知识结构。

（4）章复习题。复习题与习题类似，也从横向、纵向两个方面进行了分类。

2. 教师教学用书体例

教师教学用书旨在引导教师帮助学生学习。与教科书相同，教师教学用书体例也以“章”为一个基本单位，其基本体例在以教科书的体例为“纲”的前提下，增加了相应的教的要素，以体现“教师怎样做才有助于学生有效地学”的指导思想。教师教学用书每一章的基本体例如下：

（1）《标准》要求：介绍《标准》对相关内容的具体要求。

（2）教学目标：通过本章教学活动希望达成的多维课程目标。

（3）设计思路：介绍本章教科书的编写意图、编写思路以及内容重心等，阐述本章内容与本册书或全套书其他相关内容之间的关系。

（4）课时安排建议：提出本章具体教学课时安排建议。

（5）教学建议（总体）：针对本章教学重心及要点，提出一些在教学活动中的处理方法、注意点，以及选择其他教学资源等方面的操作性建议。

（6）评价建议（总体）：针对本章教学内容及教学活动的重心、要点，提出主要的教学评价方面和方法。

（7）各节（包括“回顾与思考”）具体教学说明：针对每一节（包括“回顾与思

考”)具体的活动或问题等,提出教学建议,提供相关问题的答案.

(8)附录:提供一个典型教学案例及其评价.有些章还提供一些学科拓展知识.

3. 使用说明

(1)从具体操作层面看,不同的教师针对同样的教学内容可以有自己的教学方式、方法,这就是教学创造性的一种体现.教师进行有效教学创造的前提是准确把握《标准》的要求、理解教科书的编写意图.因此,教师教学时可在遵循上述原则的基础上,根据学生的实际状况,创造性地使用本书,如改变或替换教科书中的例题或习题,因地制宜地创设一些学习情境、学习素材和教学用具.

(2)教科书中需要学生完成的任务,包括归纳法则(方法)、描述概念(定义)、总结所学内容的知识结构等.应首先鼓励学生通过独立思考与合作交流给出各自的答案,教师则在学生充分活动的基础之上介绍规范的表述,但不宜要求学生机械记忆规范的表述,应提倡在了解不同答案的基础之上,每个人选择最适合自己的答案.

(3)教科书中的“读一读”目的在于给对数学有兴趣的学生以更多了解数学、探究数学的机会,是教学中“弹性”的一种表现.教学中应明确:有兴趣的学生可以选择相关材料进行阅读和思考,教师则有义务给他们提供必要的帮助.习题中带“※”的内容仅仅面向部分学生,以满足他们进一步理解和研究有关知识与方法的需求,是体现教学“弹性”的另一个方面,不应当要求全体学生都尝试去完成它们.

(4)本书的目的在于帮助教师更好地把握教科书,包括它的总体目标、编写思路、内容结构、教学中应当予以关注的重点和难点.所提教学建议仅供教师在教学过程中参考,希望广大教师在使用过程中对它提出宝贵的意见和建议.

谢谢!

第七章 二元一次方程组

一、《标准》要求

1. 探索具体问题中的数量关系和变化规律，掌握用方程、函数进行表述的方法，体会模型的思想，建立符号意识.
2. 初步学会在具体的情境中能从数学的角度发现问题和提出问题，并综合运用数学知识和方法等解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力.
3. 能根据具体问题中的数量关系列出二元一次方程组，体会方程是刻画现实世界数量关系的有效模型.
4. 掌握代入消元法和加减消元法，能解二元一次方程组和简单的三元一次方程组.
5. 体会一次函数与二元一次方程的关系，会利用待定系数法确定一次函数的表达式.

二、教学目标

1. 经历从实际问题中抽象出二元一次方程组的过程，体会方程的模型思想，发展学生灵活运用有关知识解决实际问题的能力，培养学生良好的数学应用意识.
2. 了解二元一次方程（组）的有关概念，会解简单的二元一次方程组（数字系数）；能根据具体问题中的数量关系，列出二元一次方程组解决简单的实际问题，并能检验解的合理性.
3. 体会一次函数与二元一次方程、二元一次方程组的关系，会利用待定系数法确定一次函数的表达式.
4. 了解解二元一次方程组和三元一次方程组的“消元”思想，从而初步理解化“未知”为“已知”和化复杂问题为简单问题的化归思想.

三、设计思路

“一切问题都可以转化为数学问题，一切数学问题都可以转化为代数问题，而一切代数问题又都可以转化为方程. 因此，一旦解决了方程问题，一切问题将迎刃而解.”笛卡儿的这段话虽然夸大了方程的作用，但却说明了方程作为数学的一个重要分支，是刻画现实世界的一个有效数学模型. 方程在日常生活、工农业生产、城市规划乃至国防等领域都有广泛的应用，同时，它也是学习数学乃至物理、化学等其他学科知识的一个重要基础.

在六年级，学生已经学习了一元一次方程，初步感受了方程的模型作用，并积累了一些利用方程解决实际问题的经验. 在此基础上，本章将进一步研究二元一次方程组的有关概念、解法和应用等. 它是一元一次方程的继续和发展，同时又是今后学习线性方程组及平面解析几何等知识的基础，因此，本章的学习将使學生进一步体会方程的模型思想，感受代数方法的优越性，同时也将有助于巩固有理数、整式的运算、一元一次方程等知识.

在总体设计思路,本章与一元一次方程类似,强调建模思想,关注知识的形成与应用过程.为此,教科书设计继续遵循“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的模式,首先通过具体问题情境,建立有关方程并归纳出二元一次方程和二元一次方程组的有关概念,然后探索其各种解法,并在现实情境中加以应用,切实提高学生的应用意识和能力.

具体地,第1节通过丰富的实例,建立二元一次方程和二元一次方程组,让学生观察归纳出二元一次方程和二元一次方程组的有关概念,并从中体会方程的模型思想;第2节,顺理成章地给出现实问题的解答,进而通过具体方程总结出二元一次方程组的两种基本方法——代入消元法、加减消元法;第3节再次通过几个问题情境,进行列二元一次方程组解决实际问题的训练.这样,一方面在列方程组的建模过程中,强化了方程的模型思想,培养了学生列方程解决现实问题的意识和能力,另一方面,将解方程组的技能训练与实际问题的解决融为一体,在实际问题的解决过程中提高学生的解题技能;第4节,通过对二元一次方程、二元一次方程组与一次函数关系的讨论,建立方程与函数的联系,引导学生从“图形”的角度看待二元一次方程和二元一次方程组,并通过待定系数法,利用二元一次方程组确定一次函数的表达式;最后,作为选学内容,介绍三元一次方程组的基本解法.

由于《标准》明确将解三元一次方程组作为选学内容,不作考试要求.因此,教科书采用单独成节的形式编写放在本章最后一节,并以“*”号标记,定位是让学有余力的学生感受解三元一次方程组的消元思想,了解解三元一次方程组的思路,以便将来利用它们解决简单的实际问题.

对于二元一次方程组和三元一次方程组的解法,我们力求淡化其技巧和具体步骤,而注重揭示其本质思想——消元,让学生体会数学学习和研究中的“化未知为已知”的化归思想.

在题材选择上,教科书注意了题材的现实性、科学性和趣味性,既保留了一些传统的内容(如鸡兔同笼),又增加了一些更具现实性的问题(如增收节支、配制营养品等),同时还注意了问题的趣味性(谁的包裹多、里程碑上的数等),以激发学生的学习兴趣.

此外,教科书注意加强知识间的联系,特别是本章内容与七年级上册第六章“一次函数”的联系.事实上,一次函数与二元一次方程密切相关,只不过各自侧重点不同而已,因此,可以从函数的图象上理解二元一次方程及二元一次方程组的解;同时,一次函数表达式的确定是基于两个条件,具体求解时又要利用二元一次方程组.为此,教科书特意设计了第4节“二元一次方程与一次函数”,揭示二元一次方程与一次函数之间的内在联系,从“图形”的角度看待二元一次方程和二元一次方程组,并通过待定系数法,利用二元一次方程组确定一次函数的表达式.这样,将函数和方程紧密地联系在一起,使得一次函数和二元一次方程组两章内容给人浑然一体的感觉.

四、课时安排建议

1 二元一次方程组

1 课时

2 解二元一次方程组	2 课时
3 二元一次方程组的应用	3 课时
4 二元一次方程与一次函数	2 课时
*5 三元一次方程组	2 课时
回顾与思考	2 课时

五、教学建议

1. 注重学生的活动, 鼓励学生的自主探索与合作交流.

学生已经具备列一元一次方程解决实际问题的经验基础, 因而, 学生应有能力经过自主探索和交流列出二元一次方程组, 解决简单的实际问题. 在教学中, 教师应引导学生从身边熟悉的实际问题出发, 主动收集感兴趣的问题作为学习材料, 鼓励学生进行自主探索与合作交流, 列出二元一次方程组并进行解决. 让学生在自主探索与合作交流的过程中获得知识, 培养能力.

2. 注重设置丰富的问题情境, 让学生经历模型化的过程.

列出二元一次方程组解决简单的实际问题, 是第三学段代数教学中的一个重要内容, 是数学联系实际的一个重要方面. 通过这个内容的学习, 可以使學生接触诸多现实问题, 进一步培养学生发现和提出问题、分析和解决问题的能力. 因而, 方程教学首先应关注方程的建模过程. 教科书第 1 课时的目的就是通过对多种实际问题的分析, 让学生感受方程是刻画现实世界的有效模型, 教学中应让学生从具体实例出发, 经历模型化的过程, 并在此基础上抽象出数学概念. 当然, 教师应根据学生的生活实际和认知实际, 创设更为丰富、贴近学生生活的现实情境, 并引导学生分析其中的数量关系, 建立方程模型. 此外, 在解方程与应用中也应更多地关注学生的建模过程, 关注学生能否顺利地列出正确的二元一次方程组. 如可向学生提出像“题目中的已知量、未知量是什么”“各个量之间的关系是什么”的问题, 引导学生思考列方程组时如何寻求等量关系, 提高学生解决实际问题的一般性策略. 当然, 对于较为复杂的问题, 教师还可以给予进一步的指导或进行适当的分解. 如“二元一次方程组的应用”一节中, 对于里程碑上数的表示和其中一个等量关系: “12:00~13:00 间汽车行驶的路程 = 13:00~14:00 间汽车行驶的路程”的获得, 学生可能有些困难, 为此教科书通过填空的方式将问题进行了分解, 教学中, 教师可以组织学生进行适当的讨论, 对学生存在的认知障碍要进行适当的引导.

3. 注意化归思想的渗透.

代入消元法和加减消元法都是解二元一次方程组的基本方法, 其本质是“消元”. “消元”体现了数学学习和研究中“化未知为已知”的化归思想, 而且它在未来学习多元方程组、多元函数的条件最值等知识时具有广泛的应用. 因此在教学中, 教师应引导学生分析出解二元一次方程组的本质是消元, 即把“二元”转化为“一元”, 并鼓励学生用自己的语言概括解方程组的主要步骤. 在讲完二元一次方程组的两种解法后, 应引导学生作一小结比较这两种方法的差别与联系, 体会“消元”的本质, 而不要过于强调“代入”和“加减”

这两种具体技巧，更不要根据方程的特征对这两种方法进行分类选用。

4. 对具体方法进行恰当的比较与评判.

教学中，可能有一些学生习惯于列一元一次方程解决实际问题，应该说，这是一种极为正常的现象，而且有其优越的一面（少了一个未知数），因此，对这些学生，教师切不可批评，而应适当引导他们比较两种方法的关系与特点（实质上，在列一元一次方程设未知数时，已经将其中一个未知量用另一个未知量表示出来了，相当于已经完成了代入消元法的前几步，当然，这样做可能要求具有较高的思维水平），让其自主地作出选择。

六、评价建议

1. 关注学生在解决实际问题、探索等量关系等活动中的参与程度和思维水平.

在本章的学习中，学生将用较多的时间经历模型化和知识的形成与应用过程. 对上述活动过程的考察，可以从以下方面来进行：一是学生在具体活动中的投入程度——能否积极主动地从事各项活动，向同学解释自己的想法，听取他人的意见和建议. 二是学生在活动中的表现——能否在活动中进行主动思考，面对实际问题时，尝试从数学的角度运用所学的知识和方法寻求解决问题的策略，能否正确地找出实际问题中的各种数量的意义及其相互关系，并能用数学式子把这种关系表示出来.

2. 关注考察学生对知识与技能的理解和应用.

对知识与技能的评价，应重视学生的理解和在新情境中的应用. 如考察学生能否根据实际问题正确地建立模型；能否选择恰当的方法解二元一次方程组；解方程组正确与否；能否检验求得结果的合理性.

3. 关注学生列方程解决实际问题的意识的提高状况.

教学中，还要关注对学生在学习过程中表现的过程性评价，注重培养学生的应用意识. 如，让学生以小组合作学习的形式分析一些开放性的问题，并说出心得体会，在学生的交流中对其进行评价，让学生自主地观察生活实际，并据此编制有关应用问题，从学生所编制的應用问题中评判其应用意识的水平.

第七章 二元一次方程组

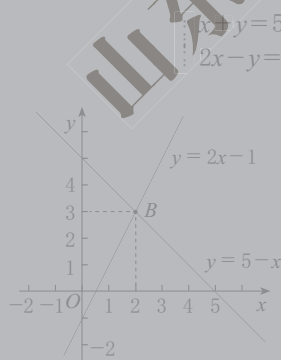
今有鸡兔同笼，
上有三十五头，
下有九十四足。
问鸡兔各几何？



你能解决上面的“鸡兔同笼”问题吗？

事实上，利用方程（组）可以很简单地解决这一问题. 方程（组）是刻画现实世界中的等量关系的有效模型，许多现实问题都可归结为方程问题.

本章将学习二元一次方程组及其解法，并利用二元一次方程组解决一些有趣的现实问题.



学习目标

- 体会二元一次方程组是刻画现实世界中的等量关系的有效模型
- 会解二元一次方程组，体会“消元”思想
- 能应用二元一次方程组解决现实生活中的实际问题
- 体会二元一次方程和一次函数的关系

方程（组）的研究与应用是我国古代数学研究的一个重要内容. 章前图首先呈现了我国古算名题“鸡兔同笼”，旨在暗示我国古代数学的杰出成就，同时激发学生学习的兴趣. 而左下方的几个方程组和图象，则揭示了二元一次方程组的几种解法以及方程与函数之间的关系. 章前文字力图揭示方程组的地位和应用，并介绍本章主要内容.

教学目标

1. 通过对实际问题的分析,使学生进一步体会方程是刻画现实世界的有效数学模型.

2. 了解二元一次方程、二元一次方程组及其解等概念,并会判断一组数是不是某个二元一次方程组的解.

作为本章的第1课时,本节将通过丰富的实例,如“谁的包裹多”“公园门票”等问题,建立二元一次方程和二元一次方程组,让学生归纳出二元一次方程和二元一次方程组的概念,并从中体会方程的模型思想;在建立了二元一次方程和二元一次方程组模型之后,基于学生的学习心理规律,学生自然会产生探求其解的欲望,因此,教科书紧接着设计了一个“做一做”活动,让学生对其中一个问题——

“公园门票”问题进行自主的探索,尝试获得其解,从而发展了学生自主探究问题的意识和能力,同时学生又获得方程(组)解的概念,感受到“二元一次方程有无数解”和“二元一次方程组解的唯一性”.

对于具体问题情境的选择,力图关注其现实性和趣味性,为此选择了“谁的包裹多”“公园门票”这样两个问题.当然,在具体教学中,教师可以根据学生的生活实际和认知实际,创设更为丰富、更贴近学生生活的现实情境.

[1] 引导学生根据老牛与小马的对话探索其中的等量关系:①老牛驮的包裹数 - 小马驮的包裹数 = 2, ②老牛驮的包裹数 + 1 = (小马驮的包裹数 - 1) × 2. 然后,列出含有所设未知数的方程.

1 二元一次方程组



设老牛驮了 x 个包裹, 小马驮了 y 个包裹.

老牛驮的包裹数比小马驮的多 2 个, 由此你能得到怎样的方程?

若老牛从小马背上拿来 1 个包裹, 这时它们各有几个包裹? 由此你又能得到怎样的方程?

昨天, 我们 8 个人去红山公园玩, 买门票花了 34 元.

每张成人票 5 元, 每张儿童票 3 元. 他们到底去了几个成人、几个儿童呢?^[1]



设他们中有 x 个成人, y 个儿童. 由此你能得到怎样的方程?

想一想

上面两个问题中, 我们分别得到方程 $x - y = 2$, $x + 1 = 2(y - 1)$ 和 $x + y = 8$, $5x + 3y = 34$. 这些方程各含有几个未知数? 含未知数的项的次数是多少?

含有两个未知数, 并且所含未知数的项的次数都是 1 的方程叫做二元一次方程 (linear equation with two unknowns).

议一议

在上面的方程 $x + y = 8$ 和 $5x + 3y = 34$ 中, x 所代表的对象相同吗? y 呢?

方程 $x + y = 8$ 和 $5x + 3y = 34$ 中, x , y 所代表的对象分别相同, 因而 x , y 必须同时满足方程 $x + y = 8$ 和 $5x + 3y = 34$. 把它们联立起来, 得

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ 5x + 3y = 34. \end{cases}$$

像这样共含有两个未知数的两个一次方程所组成的一组方程, 叫做二元一次方程组 (system of linear equations with two unknowns).^[2]

^[2]事实上, 共含有两个未知数的几个一次方程组成的一组方程, 都是二元一次方程组. 教科书中特指“两个”, 是考虑到它最为常见, 而且前文所得到的都是两个方程所组成的. 此外, 组成方程组的各个方程也不必都同时含有两个未知数. 当然, 教学中不必向学生点明这一点, 也不必对学生有关二元一次方程组概念的考查, 只要学生能够在具体问题情境中理解二元一次方程组即可. 应该指出的是, 方程组各方程中同一字母必须代表同一个量.

^[1]引导学生先分析其中的等量关系: 成人与儿童人数之和为 8, 成人票款与儿童票款之和为 34. 然后根据等量关系列出含有所设未知数的方程.

想一想

通过所列 4 个方程的共性分析, 归纳出下面的二元一次方程的概念. 教学中, 可先让学生通过观察归纳其中的共性, 并用自己的语言进行描述, 然后再组织学生交流.

议一议

使学生明白这两个方程中 x , y 所代表的对象分别相同, 从而可将两者联立形成方程组, 自然过渡到二元一次方程组的概念.

做一做

通过“做一做”，让学生体会二元一次方程有许多解，而由(1)(2)可观察出两个二元一次方程的公共解，从而自然导入下面的二元一次方程组的解的概念。

随堂练习

本课时主要让学生经历从实际问题中抽象出二元一次方程组的过程，感受方程的模型思想；同时，让学生了解二元一次方程、二元一次方程组及其解的概念。

1. 设小明买了面值 50 分的邮票 x 枚和面值 80 分的邮票 y 枚，则可列方程组

$$\begin{cases} 0.5x + 0.8y = 6.3, \\ x + y = 9. \end{cases}$$

2. (2)(4).

3. (3).

如 $\begin{cases} x-y=2, \\ x+1=2(y-1) \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x+2y=7, \\ 3y+1=2 \end{cases}$ 等都是二元一次方程组。

做一做

(1) $x=6, y=2$ 适合方程 $x+y=8$ 吗? $x=5, y=3$ 呢? $x=4, y=4$ 呢? 你还能找到其他 x, y 值适合方程 $x+y=8$ 吗?

(2) $x=5, y=3$ 适合方程 $5x+3y=34$ 吗? $x=2, y=8$ 呢?

(3) 你能找到一组 x, y 值，同时适合方程 $x+y=8$ 和 $5x+3y=34$ 吗?

适合一个二元一次方程的一组未知数的值，叫做这个二元一次方程的一个解。

如 $x=6, y=2$ 是方程 $x+y=8$ 的一个解，记作 $\begin{cases} x=6, \\ y=2. \end{cases}$ 同样， $\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$ 也

是方程 $x+y=8$ 的一个解。

二元一次方程组中各个方程的公共解，叫做这个二元一次方程组的解。

例如 $\begin{cases} x=5, \\ y=3 \end{cases}$ 就是二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=8, \\ 5x+3y=34 \end{cases}$ 的解。

随堂练习

1. 根据题意，列方程组：

小明从邮局买了面值 50 分和 80 分的邮票共 9 枚，花了 6.3 元。小明买了两种邮票各多少枚?

2. 下面 4 组数值中，哪些是二元一次方程 $2x+y=10$ 的解?

(1) $\begin{cases} x=-2, \\ y=6; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3, \\ y=4; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=6, \\ y=-2. \end{cases}$

3. 二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=10, \\ y=2x \end{cases}$ 的解是_____。

(1) $\begin{cases} x=4, \\ y=3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=3, \\ y=6; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

习题 7.1

知识技能

1. 甲种物品每个 4 kg, 乙种物品每个 7 kg. 现有甲种物品 x 个, 乙种物品 y 个, 共 76 kg.

(1) 列出关于 x, y 的二元一次方程 _____;

(2) 若 $x=12$, 则 $y=$ _____;

(3) 若有乙种物品 8 个, 则甲种物品有 _____ 个.

2. 下面 4 组数值中, 哪一组是二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-3y=2, \\ 2x+y=8 \end{cases}$ 的解?

(1) $\begin{cases} x=-1, \\ y=-3; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=2, \\ y=4; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x=4, \\ y=2; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$

3. 根据题意列方程组:

(1) 某班共有学生 45 人, 其中男生比女生的 2 倍少 9 人. 该班的男生、女生各有多少人?

(2) 将一摞笔记本分给若干同学. 若每个同学 5 本, 则剩下 8 本; 若每个同学 8 本, 又差了 7 本. 共有多少本笔记本. 多少个同学?

数学理解

4. (1) 找到几组适合方程 $x+y=0$ 的 x, y 值;

(2) 找到几组适合方程 $x-y=2$ 的 x, y 值;

(3) 找出一组 x, y 值, 使它们同时适合方程 $x+y=0$ 和 $x-y=2$;

(4) 根据上面的结论, 你能直接写出二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解吗?

5. 小明和小丽两人同时到一家水果店买水果. 小明买了 1 kg 苹果和 2 kg 梨, 共花了 13 元; 小丽买了 2 kg 苹果和 1 kg 梨, 共花了 14 元. 苹果和梨的价格各为多少? 根据题意, 小明列出方程组:

$$\begin{cases} x+2y=13, \\ 2x+y=14. \end{cases}$$

习题 7.1

1. (1) $4x+7y=76$;

(2) 4;

(3) 5.

2. (2).

3. (1) 设该班有男生 x 名, 女生 y 名, 则可列方程组

$$\begin{cases} x+y=45, \\ x=2y-9. \end{cases}$$

(2) 设有 x 个同学, y 个笔记本, 则可列方程组

$$\begin{cases} 5x+8=y, \\ 8x-7=y. \end{cases}$$

4. 二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=2 \end{cases}$

的解是 $\begin{cases} x=1, \\ y=-1. \end{cases}$ 具体过程略.

5. 小明设每千克苹果和梨的价格分别为 x 元, y 元, 而小丽设每千克梨和苹果的价格分别为 x 元, y 元, 因此, 他们所列方程组中, 同一个 x 的意义不同, 当然所列方程组也就不相同了.

教学目标

1. 会用代入消元法和加减消元法解二元一次方程组.

2. 了解解二元一次方程组的“消元”思想,初步体会“化未知为已知”的化归思想.

在第1节建立二元一次方程组的基础上,本节顺理成章地研究二元一次方程组的解法:代入消元法和加减消元法.

代入消元法、加减消元法的本质是消元——减少未知数的个数,化二元一次方程组为已经学习过的一元一次方程.代入法与加减法只是消元的一些具体技能,教学中应注意加以体会.当然,通过一定量的训练促进学生有关技能的获得还是十分必要的,但研究表明,形式化的技能训练难以激发学生的学习兴趣,为此教科书中仅设计了2课时学习代入消元法、加减消元法,而力图在后续的各节中将解方程的技能训练与实际问题的解决融为一体,在实际问题的解决过程中,无形地提高学生的解题技能.

第1课时,研究代入消元法.教科书首先承接上节场景“谁的包裹多”,并让学生思考会解什么方程,如何将二元一次方程组化为已经学过的一元一次方程,从而在具体问题的解决中初步感受代入消元法,其后通过层次渐进的两个例题,进一步进行代入消元法解二元一次方程组的巩固训练,最后对所应用的方法进行整理与提炼.

^[1]提示学生能否将二元一次方程组转化为已经学过的一元一次方程问题,让学生初步体会化归思想.

而小丽列出的是:

$$\begin{cases} 2x+y=13, \\ x+2y=14. \end{cases}$$

交流后,他们发现两个方程组不同,于是展开了争论,都说自己是正确的,而对方是错误的.他们列的方程组正确吗?你认为他们产生分歧的原因是什么?

2 解二元一次方程组

老牛和小马到底各驮了几个包裹呢?这就需要解方程组

$$x-y=2, \quad \textcircled{1}$$

$$x+1=2(y-1). \quad \textcircled{2}$$

一元一次方程我会解! 二元一次方程组……^[1]

由①,得 $y=x-2$. ③

由于方程组中相同的字母代表同一对象,所以方程②中的 y 也等于 $x-2$,可以用 $x-2$ 代替方程②中的 y .这样有

$$x+1=2(x-2-1). \quad \textcircled{4}$$

解所得的一元一次方程④,得 $x=7$.

再把 $x=7$ 代入③,得 $y=5$.

经检验, $x=7, y=5$ 适合原方程组.

这样,我们得到二元一次方程组

$$\begin{cases} x-y=2, \\ x+1=2(y-1) \end{cases} \text{ 的解 } \begin{cases} x=7, \\ y=5. \end{cases}$$

因此,老牛驮了7个包裹,小马驮了5个包裹.

啊哈,二元化为一元了!

检验可以口算或在草稿纸上演算,以后可以不必写出.

例 1 解方程组

$$\begin{cases} 3x+2y=14, & \text{①} \\ x=y+3. & \text{②} \end{cases}$$

解: 将 ② 代入 ①, 得 $3(y+3)+2y=14$,

$$3y+9+2y=14,$$

$$5y=5,$$

$$y=1.$$

将 $y=1$ 代入 ②, 得

$$x=4.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$

例 2 解方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=16, & \text{①} \\ x+4y=13. & \text{②} \end{cases}$$

解: 由 ②, 得 $x=13-4y$.

将 ③ 代入 ①, 得 $2(13-4y)+3y=16$,

$$26-8y+3y=16,$$

$$-5y=-10,$$

$$y=2.$$

将 $y=2$ 代入 ③, 得

$$x=5.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x=5, \\ y=2. \end{cases}$

议一议

(1) 上面解方程组的基本思路是什么?

(2) 主要步骤有哪些?

上面解方程组的基本思路是“消元”——把“二元”变为“一元”.

主要步骤是: 将其中一个方程中的某个未知数用含有另一个未知数的代数

例 1、例 2

本节两个例子的安排体现先易后难的原则. 例 1 的方程 ② $x=y+3$, 已经将 x 表示成含有 y 的代数式, 直接代入即可消去一个未知数. 而例 2 则须先进行恒等变形. 在这些例题的教学中, 教师可以鼓励学生通过自主探索与交流尝试求解. 此外各学生“消元”的具体方法可能不同, 教学中不必强求解答过程的统一.

议一议

由上面例 1、例 2 两个实例, 让学生体会解二元一次方程组的基本思路是消元, 并用自己的语言概括出解方程组的主要步骤.

式表示出来,并代入另一个方程中,从而消去一个未知数,化二元一次方程组为一元一次方程.这种解方程组的方法称为代入消元法,简称代入法.

随堂练习

$$(1) \begin{cases} x = 4, \\ y = 8; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 5, \\ y = 15; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 9, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 3, \\ y = 0. \end{cases}$$

习题7.2

$$1. (1) \begin{cases} x = -1, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = 2, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} m = 3, \\ n = 2. \end{cases}$$

随堂练习

用代入消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} y = 2x, \\ x + y = 12; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 7; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{y-5}{2}, \\ 4x + 3y = 65; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x - 2y = 9, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

习题 7.2

知识技能

1. 用代入消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x - 3y = 2, \\ y = x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 5, \\ 2x + y = 8; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} m - \frac{n}{2} = 2, \\ 2m + 3n = 12. \end{cases}$$

数学理解

2. 还记得上一节课我们是用什么方法找到二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 8, \\ 5x + 3y = 34 \end{cases}$ 的解吗?

用代入消元法解这个方程组,并比较一下这两种方法,说说你的体会.

怎样解下面的二元一次方程组呢?

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 2x - 5y = -11. \end{cases} \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 2x - 5y = -11. \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

2. 上一课时,学生通过列举探索得到了两个方程的公共解,主要是利用方程组解的定义求解的,而本节学生用代入消元法求解,毫无疑问更具一般性.设计本题,正是希望学生通过方法的对比感受到学习新方法的必要性.



小彬

把②变形得 $x = \frac{5y-11}{2}$,
代入①, 不就消去 x 了!



小丽

$5y$ 和 $-5y$ 互为相
反数……

把②变形得 $5y = 2x + 11$,
可以直接代入①呀!



小明

按小丽的思路, 你能消去一个未知数吗?

两个方程相加, 可以得到 $5x = 10$,

$$x = 2.$$

将 $x = 2$ 代入①, 得 $-6 + 5y = 21$,

$$y = 3.$$

经检验, $x = 2, y = 3$ 适合原方程组.

所以方程组 $\begin{cases} 3x + 5y = 21, \\ 2x - 5y = -11 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$

检验可以口算或在草
稿纸上演算, 以后可以不
必写出.

例3 解方程组

$$\begin{cases} 2x - 5y = 7, \\ 2x + 3y = -1. \end{cases}$$

①

②

解: ②-①, 得

$$8y = -8,$$

$$y = -1.$$

将 $y = -1$ 代入①, 得 $2x + 5 = 7$,

$$x = 1.$$

在具体教学中, 教师应首先要求学生自主地解决该问题, 并进行解法的交流, 以学生的解法为基础展开后续的教学. 如果学生没有出现加减消元的想法, 教师再引导学生思考“两个方程中未知数的系数有什么特征, 能否设法直接消去某个未知数”, 从而得出加减消元法的思路.

通过第1课时代入消元法的学习, 学生已经能够解一般的二元一次方程组. 但有时代入消元法可能比较繁杂, 而且加减消元法在将来的矩阵运算中有着广泛的应用, 因此本课时进一步学习二元一次方程组的加减消元法.

和第1课时一样, 教科书首先承接上一课时, 提出一个二元一次方程组, 要求学生思考如何消元, 当然学生可能习惯于利用上一课时的代入消元法; 但考虑到方程本身的特征, 也许部分学生未必将 y 完全解出, 直接得到 $5y = 2x + 11$; 当然可能还有学生会发现 $5y$ 与 $-5y$ 之间的特殊关系, 直接相加消去 y , 这实际上就是所谓的加减消元法. 接着, 教科书设计了两个层次渐进的例题进行巩固训练. 最后, 再对解方程组的基本思路和主要步骤进行总结.

例4

引例与例3通过两个方程的加减即消去了一个未知数，转化为一元一次方程，例4通过简单的加减无法达到上述目的，冒泡提醒学生思考如何将其转化为例3的形式，体会化归思想. 当然，在具体操作中，消元的方法可以是多样的，如例4也可以设法消去 y . 教学中可以让学生自主地选择所要消去的未知数.

议一议

由上面两个实例，让学生体会解二元一次方程组的基本思路是消元，并用自己的语言概括出解方程组的主要步骤.

学完代入法和加减法后，还可引导学生对这两种方法进行比较，体会其实质都是消元，即通过消去一个未知数，化“二元”为“一元”. 这里“消元”思想是教学的重点，而不宜对学生提出有关问题解决的速度与解法的便捷性等要求. 因此，教学中应鼓励学生选择不同的方法解二元一次方程组，然后对不同方法进行比较，逐步积累相关经验，但要避免“套题型”的倾向.

随堂练习

$$(1) \begin{cases} x = -1, \\ y = -5; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = -2, \\ y = -3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} s = -1, \\ t = 3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = -3, \\ y = -4. \end{cases}$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$

例4 解方程组

能否使两个方程中 x (或 y) 的系数相等 (或相反) 呢?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, & \text{①} \\ 3x + 4y = 17. & \text{②} \end{cases}$$

解: ① $\times 3$, 得

$$6x + 9y = 36. \quad \text{③}$$

② $\times 2$, 得

$$6x + 8y = 34. \quad \text{④}$$

③ $-$ ④, 得

$$y = 2.$$

将 $y = 2$ 代入①, 得

$$x = 3.$$

所以原方程组的解是 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

议一议

上面解方程组的基本思路是什么? 主要步骤有哪些?

上面解方程组的基本思路仍然是“消元”，主要步骤是通过两式相加（减）消去其中一个未知数. 这种解二元一次方程组的方法叫做**加减消元法**，简称**加减法**.

随堂练习

用加减消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 7x - 2y = 3, \\ 9x + 2y = -19; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 6x - 5y = 3, \\ 6x + y = -15; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4s + 3t = 5, \\ 2s - t = -5; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 5x - 6y = 9, \\ 7x - 4y = -5. \end{cases}$$

读一读

计算机是如何解方程组的

计算机的迅速发展大大提高了运算的速度和解数学问题的能力. 先进的计算机能快速准确地求出含有成千上万个未知数的一次方程组的解. 这是个程序化的过程, 它的数学原理其实与我们所学的消元法一致. 下面就以二元一次方程组为例, 介绍计算机的求解原理和步骤.

基本原理: 对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

①

②

若 $a_{11} \neq 0$, 则 $(-\frac{a_{21}}{a_{11}}) \times \text{①} + \text{②}$, 得

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a'_{22}y = b'_2. \end{cases}$$

③

④

其中

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12}, \quad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1.$$

若 ④ 中 $a_{22} \neq 0$, 则

$$\begin{cases} y = \frac{b'_2}{a'_{22}}, \\ x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}. \end{cases}$$

计算步骤如下表:

一般计算步骤	以方程组 $\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ 为例, 其中 $a_{11}=4, a_{12}=3, b_1=5,$ $a_{21}=2, a_{22}=-1, b_2=-5.$
(1) 计算 $m = \frac{a_{21}}{a_{11}};$	(1) $m = \frac{2}{4} = 0.5;$
(2) 计算 $a'_{22} = a_{22} - ma_{12},$ $b'_2 = b_2 - mb_1;$	(2) $a'_{22} = -1 - 0.5 \times 3 = -2.5,$ $b'_2 = -5 - 0.5 \times 5 = -7.5;$
(3) 计算 $y = \frac{b'_2}{a'_{22}},$ $x = \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}}.$	(3) $y = \frac{-7.5}{-2.5} = 3,$ $x = \frac{5 - 3 \times 3}{4} = -1.$ 所以方程组的解为 $\begin{cases} x = -1, \\ y = 3. \end{cases}$

读一读

让学生初步了解计算机求解二元一次方程组的基本思想和具体步骤, 进一步体会消元思想, 同时, 开阔学生视野. 有兴趣的学生可能会利用计算机、计算器进行尝试求解, 甚至有的学生还会对三元以上的方程组进行尝试, 这些活动经验对学生的发展十分重要.

以上这一过程称为顺序消元法. 对于三元一次方程组、四元一次方程组等多元方程组, 其求解原理一样.

习题7.3

$$1. (1) \begin{cases} x = 5, \\ y = 2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = 2, \\ y = 5; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = -3; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = 5, \\ y = 7. \end{cases}$$

用加减消元法解二元一次方程组时, 一般可以先把方程组变形再利用加减消元, 如

$$(4) \text{ 变形后为 } \begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - 5y = -20. \end{cases}$$

$$2. \text{ 解为 } \begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \end{cases} \text{ 具体过程略. 两}$$

种方法的共同点都是设法消去一个未知数, 使二元问题转化为一元问题.

$$3. (1) \begin{cases} x = 5, \\ y = 3; \end{cases}$$

(2) 学生的方法可以多样, 可以将方程组中括号

$$\text{内各项展开得到方程组 } \begin{cases} 2x + 8y = 16, \\ -2x + 8y = 0, \end{cases}$$

$$\text{再解得结果 } \begin{cases} x = 4, \\ y = 1; \end{cases} \text{ 当然, 也可能有部分学生发现}$$

$$(1)(2) \text{ 两小题之间的联系, 直接利用第(1)小题结论得到 } \begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \end{cases} \text{ 进而求解. 设计}$$

4. 假设这两个数分别为 x 和 y , 如果知道了这两个数的和与差, 就可以得到一个二元一次方程组, 从而求出 x 和 y 的值.

习题 7.3

知识技能

1. 用加减消元法解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 4x - 3y = 14, \\ 5x + 3y = 31; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x - 5y = -21, \\ 4x + 3y = 23; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 4x + 7y = -19, \\ 4x - 5y = 17; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3(x - 1) = y + 5, \\ 5(y - 1) = 3(x + 5). \end{cases}$$

数学理解

2. 分别用代入消元法和加减消元法解方程组 $\begin{cases} x + y = 7, \\ 5x + 3y = 31, \end{cases}$ 并说明两种方法的共同点.

$$3. (1) \text{ 解二元一次方程组 } \begin{cases} 5x - 3y = 16, \\ 3x - 5y = 0; \end{cases}$$

(2) 现在你可以用哪些方法得到方程组

$$\begin{cases} 5(x + y) - 3(x - y) = 16, \\ 3(x + y) - 5(x - y) = 0 \end{cases}$$

的解? 对这些方法进行比较.

联系拓广

4. 如果知道了两个数的和与差, 你一定能求出这两个数吗? 说说你的理由.

3 二元一次方程组的应用

《孙子算经》是我国古代一部较为普及的算书,许多问题浅显有趣.其中下卷第31题“雉兔同笼”流传尤为广泛,漂洋过海流传到了日本等国.

“雉兔同笼”题为:“今有雉(鸡)兔同笼,上有三十五头,下有九十四足.问雉兔各几何?”

(1)“上有三十五头”的意思是什么?“下有九十四足”呢?

(2)你能根据(1)中的数量关系列出方程组吗?

(3)你能解决这个有趣的问题吗?与同伴进行交流.^[1]

例1 以绳测井.若将绳三折测之,绳多五尺;若将绳四折测之,绳多一尺.绳长、井深各几何?

题目大意是:用绳子测量水井的深度.如果将绳子折成三等份,一份绳长比井深多5尺;如果将绳子折成四等份,一份绳长比井深多1尺.绳长、井深各是多少尺?

解:设绳长 x 尺,井深 y 尺,则

$$\frac{x}{3} - y = 5, \quad ①$$

$$\frac{x}{4} - y = 1. \quad ②$$

①-②,得

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 4,$$

$$\frac{x}{12} = 4,$$

$$x = 48.$$

将 $x=48$ 代入①,得 $y=11$.

所以绳长48尺,井深11尺.

教学.在内容的编排顺序上,教科书遵循了由易到难的原则(等量关系从直接获得到借助表格、填空等进行分析得到),突出建立方程组的各种策略.

此外,在这几课时的教学中,教师应更多地关注学生的建模过程,关注学生能否顺利地列出正确的二元一次方程组.如可向学生提出“题目中的已知量、未知量是什么”“各个量之间的关系是什么”等问题,使他们形成解决实际问题的一般性策略.对于具有一定难度的问题,教师可以做适当的分解或组织学生研讨.

人们运用方程组解决含有多个未知数的问题已有很长的历史,中国传统数学在方程及方程组的研究方面也有许多成果.本课时选择的几个问题来源于我国古代数学著作中的相关记载,通过这些内容使学生在运用二元一次方程组解决实际问题的过程中,感受到数学文化的熏陶.

教学目标

让学生经历和体验列方程组解决实际问题的过程,体会方程(组)是刻画现实世界的有效数学模型,培养学生的数学应用能力.

本课时及其后两课时,通过几个现实问题情境,展现运用二元一次方程组解决实际问题的过程,突出方程组作为数学模型应用的广泛性和有效性.通过这三课时内容的设计,一方面在列方程组的建模过程中,强化了方程的模型思想,培养了学生列方程解决现实问题的意识和能力;另一方面,将解方程组的技能训练与实际问题的解决融为一体,在实际问题的解决过程中,进一步提高学生解方程组的技能.在题材的选择上,教科书注意了题材的现实性、科学性和趣味性,教学中,教师可以根据学生的生活实际和认知实际,选择更贴近学生实际的素材进行

作为二元一次方程组应用的第 1 节内容，本课时涉及的等量关系比较简单，方程组的模型相对比较容易建立. 本课时的教学旨在引出用二元一次方程组解决实际问题，让学生大致了解用二元一次方程组解决实际问题的基本步骤：理解题意，寻找等量关系，设未知数列方程组，解方程组.

^[1] 首先呈现有趣的古算题“鸡兔同笼”，意在激发学生的学习兴趣.

本题的答案为鸡 23 只，兔 12 只.

随堂练习

列方程组解古算题：

“今有牛五、羊二，直金十两。牛二、羊五，直金八两。牛、羊各直金几何？”

题目大意是：5头牛、2只羊共价值10两“金”。2头牛、5只羊共价值8两“金”。每头牛、每只羊各价值多少“金”？

习题 7.4

数学理解

1. 我们知道，一些通过列二元一次方程组解决的应用题，往往也可以通过列一元一次方程甚至用小学的算术方法获得解决，如本节的“鸡兔同笼”问题。试用这些方法解决本节的“鸡兔同笼”问题和随堂练习中的问题，看看这些方法之间有什么异同之处，并与同伴进行交流。

问题解决

2. 用一根绳子环绕一棵大树。若环绕大树3周，则绳子还多4尺；若环绕大树4周，则绳子又少了3尺。这根绳子有多长？环绕大树一周需要多少尺？
3. 《九章算术》中有一个问题：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何？”
题目大意是：有几个人一起去买一件物品，每人出8元，多3元；每人出7元，少4元。问有多少人？该物品价值多少元？

某工厂去年的利润（总产值－总支出）为200万元。今年总产值比去年增加了20%，总支出比去年减少了10%，今年的利润为780万元。去年的总产值、总支出各是多少万元？

设去年的总产值为 x 万元，总支出为 y 万元，则有

	总产值/万元	总支出/万元	利润/万元
去年	x	y	200
今年			

感受到新知识学习的必要性。当然，教学中也可以要求学生在课堂进行这些方法的比较。

下面的案例也许对教学有一定的参考价值。

案例：哪种方法好？

这是二元一次方程组的一节应用课。在学生自主选择方法解决了我国古典名题“鸡兔同笼”（学生可以分别用小学算术方法、一元一次方程和本章刚刚学习的二元一次方程组求解），并思考这些方法的繁简程度和相互间的关系后，教师进一步呈现了下面的问题，要求学生自主选择方法解决：

“今有牛五，羊二，直金十两。牛二，羊五，直金八两。牛羊各直金几何？”

在其后学生的汇报中，发现几乎所有学生都能列二元一次方程组，部分学生列的是一元一次方程，而只有几个学生用小学的算术方法获得答案。

随堂练习

该题出自《九章算术》卷八方程[七]，其解为：每头

牛值“金” $\frac{34}{21}$ 两，每只羊直

“金” $\frac{20}{21}$ 两。提示：可设每

头牛值“金” x 两，每只羊值“金” y 两，则有方程组

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 2x + 5y = 8. \end{cases}$$

习题 7.4

1. 可以利用二元一次方程组求解的问题，实际上都可以用一元一次方程以及小学的算术方法求解，因而，部分学生可能感受不到学习二元一次方程组的必要性。为此，本节设计了这样一个课外习题，力图让学生感受各种方法之间的内在联系和差别，从而产生比较好的知识联结，能根据实际情况选择使用不同的方法，同时也可以

下面是部分学生对几种方法的评价:

生 1: 小学的方法比较巧妙, 我很佩服这个同学. 但方程方法比较扎实.

生 2: 小学的方法没有什么了不起, 只是方程方法的解答过程

生 3: 二元一次方程组的方法最基本, 列一个未知数只是将一个条件先用掉了.

生 4: 二元一次方程组的方法最简单, 但它的步骤多了些. 实际上, 没有一个绝对好的方法.

学生的评价已经对方法的优化与选择做了一个比较好的诠释. 是的, 没有绝对好的方法, 每个学生可以选择最适合自己的方法.

2. 这根绳子有 25 尺, 环绕大树一周需要 7 尺.

提示: 可设绳子有 x 尺, 环绕大树一周需要 y 尺, 则有方程组
$$\begin{cases} 3y + 4 = x, \\ 4y - 3 = x. \end{cases}$$

3. 有 7 人, 物价 53 元.

提示: 可设有 x 人, 物价 y 元, 则有方程组
$$\begin{cases} 8x - 3 = y, \\ 7x + 4 = y. \end{cases}$$

根据上表,你能通过列方程组解决这个问题吗?^[1]

例 2 医院用甲、乙两种原料为手术后的病人配制营养品. 每克甲原料含 0.5 单位蛋白质和 1 单位铁质, 每克乙原料含 0.7 单位蛋白质和 0.4 单位铁质. 若病人每餐需要 35 单位蛋白质和 40 单位铁质, 那么每餐甲、乙两种原料各多少克恰好满足病人的需要?

分析: 设每餐需甲、乙两种原料各 x g, y g, 则有

	甲原料 x g	乙原料 y g	所配制的营养品
其中所含蛋白质			
其中所含铁质			

解: 设每餐需甲、乙两种原料各 x g, y g, 则根据题意, 得方程组

$$\begin{cases} 0.5x + 0.7y = 35, \\ x + 0.4y = 40. \end{cases}$$

化简, 得

$$\begin{cases} 5x + 7y = 350, \\ 5x + 2y = 200. \end{cases}$$

①-②, 得

$$\begin{aligned} 5y &= 150, \\ y &= 30. \end{aligned}$$

将 $y=30$ 代入 ①, 得

$$x = 28.$$

所以每餐需甲原料 28 g、乙原料 30 g.

教学目标

让学生进一步经历和体验列方程组解决实际问题的过程, 体会方程(组)是刻画现实世界的有效数学模型, 培养学生的数学应用能力.

本课时让学生进一步经历用二元一次方程组解决实际问题的步骤和方法, 情境及例、习题中的等量关系均不易直接获得, 需要借助列表进行分析, 找出问题中所蕴涵的等量关系.

在教学中, 教师应充分发挥学生自主学习的积极性, 引导学生先独立思考发现问题中的等量关系, 再与同伴进行合作交流. 教师应更多地关注学生的建模过程, 关注学生能否顺利地列出正确的二元一次方程组, 在此基础上突出解题过程, 加强学生解方程组的技能训练.

随堂练习

1. 一班和二班共有 100 名学生, 他们的体育达标率(达到标准的百分率)为 81%. 如果一班学生的体育达标率为 87.5%, 二班的达标率为 75%, 那么一班、二班的学生数各是多少?
设一班、二班学生数分别为 x 名、 y 名, 填写下表并求出 x , y 的值.

^[1] 设去年总产值为 x 万元, 总支出为 y 万元, 则今年总产值为 $(1+20\%)x$ 万元, 总支出为 $(1-10\%)y$ 万元, 由条件可得方程组

$$\begin{cases} x - y = 200, \\ (1+20\%)x - (1-10\%)y = 780. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 2\,000, \\ y = 1\,800. \end{cases}$

例 2

表格中第一行: 0.5 x 单位, 0.7 y 单位, (0.5 x + 0.7 y) 单位;
第二行: x 单位, 0.4 y 单位, (x + 0.4 y) 单位.

《《》 随堂练习

1. 一班有 48 人, 二班有 52 人.

提示: 可设一班有 x 人, 二班有 y 人, 则有方程组

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ 87.5\%x + 75\%y = 81\%(x + y). \end{cases}$$

2. 第一种情况: 表内依次填 $(2 + 2.5)x$, $2.5y$, $(2 + 2.5)x + 2.5y$, 其值为 36; 第二种情况: 表内依次填 $3x$, $(2 + 3)y$, $3x + (2 + 3)y$, 其值为 36.

甲速度为 6 km/h , 乙速度为 3.6 km/h .

《《》 习题 7.5

1. 在数学学习中, 我们固然要关注数学模型的建构过程、数学模型的数学解决过程, 这些都是利用数学知识分析问题、解决问题的基础. 但学生数学应用意识的发展, 还需要学生有一个数学的眼光, 从纷繁复杂的现象中看出数学关系, 挖出数学本质. 为此, 除了呈现大量数学的应用, 让学生感受数学应用的广泛外, 可能还需要发展学生应用数学解决问题的自主意识. 教学中可以让学生主动寻求有关数学模型的背景. 本题的设计意图正是如此. 具体教学中, 可以通过适当的方式让学生交流各自编制的问题, 给学生提供一个交流的平台, 这既是对学生的一个督促, 也能丰富学生对有关知识背景的认识, 而对教师而言, 这同样也是一个不可多得的教学资源.

2. 该旅游团租住了三人间 8 间, 两人间 13 间.

提示: 可设租住三人间 x 间, 两人间 y 间, 则有方程组
$$\begin{cases} 3x + 2y = 50, \\ 90x \times 3 + 120y \times 2 = 5280. \end{cases}$$

3. 甲、乙的速度分别是 $\frac{25}{6} \text{ m/s}$ 、 $\frac{55}{6} \text{ m/s}$.

提示: 可设甲、乙的速度分别为 $x \text{ m/s}$ 、 $y \text{ m/s}$, 则有方程组
$$\begin{cases} 30(x + y) = 400, \\ 80(y - x) = 400. \end{cases}$$

	一班	二班	两班总和
学生数			
达标学生数			

2. 甲、乙两人从相距 36 km 的两地相向而行. 如果甲比乙先走 2 h, 那么他们在乙出发 2.5 h 后相遇; 如果乙比甲先走 2 h, 那么他们在甲出发 3 h 后相遇. 甲、乙两人每小时各走多少千米?

设甲、乙两人每小时分别行走 $x \text{ km}$, $y \text{ km}$, 填写下表并求 x , y 的值.

	甲行走的路程	乙行走的路程	甲、乙两人行走的路程之和
第一种情况 (甲先走 2 h)			
第二种情况 (乙先走 2 h)			

《《》 习题 7.5

《《》 数学理解

1. 编一道应用题, 使得其中的未知数满足方程组

$$\begin{cases} x + y = 200, \\ 5\%x + 45\%y = 35\% \times 200. \end{cases}$$

当然, 在编拟应用题时, 你可以根据实际背景适当改变上面方程中的数据, 但不要改变方程的形式.

《《》 问题解决

2. 某旅馆的客房有三人间和两人间两种, 三人间每人每天 90 元, 两人间每人每天 120 元. 一个 50 人的旅游团到该旅馆住宿, 租住了若干客房, 且每个客房正好住满, 一天共花去住宿费 5 280 元. 两种客房各租住了多少间?
3. 某体育场的环形跑道长 400 m, 甲、乙分别以一定的速度练习长跑和自行车. 如果反向而行, 那么他们每隔 30 s 相遇一次. 如果同向而行, 那么每隔 80 s 乙就追上甲一次. 甲、乙的速度分别是多少?

小明的爸爸骑着摩托车带着小明在公路上匀速行驶, 下图是小明每隔 1 h 看到的里程情况. 你能确定小明在 12:00 看到的里程碑上的数吗?^[1]

是一个两位数, 它的两个数字之和为 7.

十位与个位数字与 12:00 时所看到的正好互换了.

比 12:00 时看到的两位数中间多了个 0.



12:00

13:00

14:00

如果设小明在 12:00 看到的数的十位数字是 x , 个位数字是 y , 那么

(1) 小明在 12:00 看到的数可表示为 _____,

根据两个数字和是 7, 可列出方程 _____;

(2) 小明在 13:00 看到的数可表示为 _____,

12:00~13:00 间摩托车行驶的路程是 _____;

(3) 小明在 14:00 看到的数可表示为 _____,

13:00~14:00 间摩托车行驶的路程是 _____;

(4) 12:00~13:00 与 13:00~14:00 两段时间内摩托车行驶的路程有什么关系? 你能列出相应的方程吗?

根据以上分析, 得方程组

$$\begin{cases} x+y=7, \\ (100x+y)-(10y+x)=(10y+x)-(10x+y). \end{cases}$$

解这个方程组, 得

$$\begin{cases} x=1, \\ y=6. \end{cases}$$

因此, 小明在 12:00 看到的里程碑上的数是 16.

经过前两节的学习, 学生对用二元一次方程组解决实际问题的步骤和方法有了基本的了解. 与前两节相比, 本节选择的问题数量关系更为复杂, 教科书以此为载体展现了分析数量关系、建立方程组的过程和策略, 在此基础上归纳列方程组解决实际问题的一般步骤.

在教学中, 教师可向学生提出“题目中的已知量、未知量是什么”“各个量之间的关系是什么”等问题, 鼓励学生探究不同的分析、解决问题的方法, 使他们形成解决实际问题的一般性策略, 必要时教师可以对问题做适当的分解或组织学生进行研讨.

^[1] “里程碑上的数”这一场景较为有趣, 它既是一个数字问题, 又和行程有关, 但相对而言有一定的难度. 为此教科书通过填空的方式将问题进行了分解. 解决这个问题的关键是: 一是找出等量关系, 12:00~13:00 间摩托车行驶的路程 = 13:00~14:00 间摩托车行驶的路程, 12:00 时小明看到的里程碑上的两个数字之和是 7; 二是用 x, y 正确地表示出三个时刻小明所看到的数及上面的等量关系. 各空依次为 (1) $10x+y$, $x+y=7$; (2) $10y+x$, $(10y+x)-(10x+y)$; (3) $100x+y$, $(100x+y)-(10y+x)$; (4) 12:00~13:00 间摩托车行驶的路程与 13:00~14:00 间摩托车行驶的路程相等, 可列方程 $(10y+x)-(10x+y)=(100x+y)-(10y+x)$.

例 3

本题中的等量关系为：一是两个两位数的和是 68；二是变化后的两个四位数的差为 2 178. 这些学生易于寻求. 但如何表示这两个四位数是本题的难点.

各空依次为 $100x + y$, $100y + x$.

教师应鼓励学生先自主探究, 如果学生理解题意、表述题意确有困难, 可先以具体的数字为例加以解释, 进而引导学生思考: 若设这两个数分别为 x , y , 则得到的四位数可如何表示? 帮助学生正确地表述进而列出恰当的方程.

议一议

引导学生回顾本章各个问题的解决过程, 归纳出列二元一次方程组解决实际问题的一般步骤. 这里不一定要明晰一个十分具体的步骤, 只要学生能了解这个过程即可, 不必要求学生的回答规范化、统一化.

随堂练习

这个两位数是 56.

提示: 可设十位数字是 x , 个位数字是 y , 则有方程组
$$\begin{cases} 10x + y - 3(x + y) = 23, \\ 10x + y = 5(x + y) + 1. \end{cases}$$

例 3 两个两位数的和是 68, 在较大的两位数的右边接着写较小的两位数, 得到一个四位数; 在较大的两位数的左边写上较小的两位数, 也得到一个四位数. 已知前一个四位数比后一个四位数大 2 178, 求这两个两位数.

分析: 设较大的两位数为 x , 较小的两位数为 y .

在较大数的右边接着写较小的数, 所写的数可表示为 _____;

在较大数的左边写上较小的数, 所写的数可表示为 _____.

解: 设较大的两位数为 x , 较小的两位数为 y , 则

$$\begin{cases} x + y = 68, \\ (100x + y) - (100y + x) = 2\,178. \end{cases}$$

化简, 得

$$\begin{cases} x + y = 68, \\ 99x - 99y = 2\,178. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x + y = 68, \\ x - y = 22. \end{cases}$$

解该方程组, 得

$$\begin{cases} x = 45, \\ y = 23. \end{cases}$$

所以这两个两位数分别是 45 和 23.

议一议

列二元一次方程组解决实际问题的一般步骤是怎样的? 与同伴进行交流.

随堂练习

一个两位数, 减去它的各位数字之和的 3 倍, 结果是 23; 这个两位数除以它的各位数字之和, 商是 5, 余数是 1. 这个两位数是多少?

习题 7.6

数学理解

1. 现实生活和数学学习中,有许多问题可以借助二元一次方程组解决.试编制一个可以用二元一次方程组解决的问题.

问题解决

2. 小明和小亮做加法游戏.小明在一个加数后面多写了一个 0,得到的和为 242;而小亮在另一个加数后面多写了一个 0,得到的和为 341.原来两个加数分别是多少?
3. 小颖家离学校 1 880 m,其中有一段为上坡路,另一段为下坡路.她跑步去学校共用了 16 min,已知小颖在上坡路上的平均速度是 4.8 km/h,而她在下坡路上的平均速度是 12 km/h.小颖上坡、下坡各用了多长时间?
4. 某商店准备用两种价格分别为 18 元/千克和 10 元/千克的糖果混合成杂拌糖果出售,混合后糖果的价格是 15 元/千克.现在要配制这种杂拌糖果 100 千克,需要两种糖果各多少千克?

4 二元一次方程与一次函数

- (1) 方程 $x+y=5$ 的解有多少个?写出其中的几个.
- (2) 在直角坐标系中分别描出以这些解为坐标的点,它们在一次函数 $y=5-x$ 的图象上吗?
- (3) 在一次函数 $y=5-x$ 的图象上任取一点,它的坐标适合方程 $x+y=5$ 吗?
- (4) 以方程 $x+y=5$ 的解为坐标的所有点组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象相同吗?

本节分为两课时,

第 1 课时的教学目标是:

1. 使学生初步体会二元一次方程(组)与一次函数的关系.
2. 能从“图形”的角度看待二元一次方程和二元一次方程组.
3. 会利用待定系数法确定一次函数的解析表达式.

本课时旨在通过二元一次方程(组)与一次函数关系的揭示,建立方程与函数的联系,引导学生从图形的角度看待二元一次方程和二元一次方程组,并通过待定系数法,利用二元一次方程组确定一次函数的表达式.因此,教科书首先通过对二元一次方程关系式与一次函数的对比分析,让学生认识到:从“数”的角度看,方程与函数描述的是同样的关系;从“形”的角度看,它们对应解

习题 7.6

1. 本题的设计意图、教学处理建议,与习题 7.5 第 1 题相同.

2. 两个加数分别是 21, 32.

提示:可设小明在 x 后面多写了一个 0,小亮在 y 后面多写了一个 0,则有方程组

$$\begin{cases} 10x+y=242, \\ x+10y=341. \end{cases}$$

3. 小颖上坡用 11 min,下坡用 5 min.

提示:可设小颖上坡用 x min,下坡用 y min,则有方程组

$$\begin{cases} x+y=16, \\ 4.8 \times \frac{x}{60} + 12 \times \frac{y}{60} = \frac{1\ 880}{1\ 000}. \end{cases}$$

4. 需要价格为 18 元/千克的糖果 62.5 千克,价格为 10 元/千克的糖果 37.5 千克.

提示:可设需要价格为 18 元/千克的糖果 x 千克,价格为 10 元/千克的糖果 y 千克,则有方程组

$$\begin{cases} x+y=100, \\ 18x+10y=15 \times 100. \end{cases}$$

(点)组成的图象相同,得到二元一次方程图象的特征.然后以此为基础,得到:一般地,从图形的角度看,确定两条直线交点的坐标,相当于求相应的二元一次方程组的解;解一个二元一次方程组,相当于确定两条直线交点的坐标.

从图形的角度看二元一次方程组可以从直观上获得问题的解,但直观的方法往往并不准确,有时还需要从直观的图象上获取准确信息,这里就涉及求图象对应的代数表达式的问题.为此,第2课时首先设计了一个具体问题,要求学生思考其具体解法,在解法的交流中,必有学生不满足于从图形得到的近似结果,因而需要寻求图象对应的代数表达式,这样就十分自然地过渡到一次函数代数表达式的确定问题,然后再通过一定的例、习题加以巩固.

[1] 通过学生的思考和操作,

力图揭示出方程与函数图象之间的联系,建立起“数”——二元一次方程组与“形”——函数的图象(直线)之间的对应,培养学生初步的数形结合的意识 and 能力.

做一做

进一步体会方程与函数图象之间的联系,让学生明确:从图形的角度看,确定两条直线交点的坐标,相当于求相应的二元一次方程组的解;解一个二元一次方程组,相当于确定两条直线交点的坐标.

想一想

学生从“形”上易于发现相应的函数图象——直线相互平行,而从“数”的方面也不难看出

方程 $x+y=5$ 的解有无数个.事实上,以方程 $x+y=5$ 的解为坐标的点组成的图象与一次函数 $y=5-x$ 的图象相同,是同一条直线.

$x+y=5$ 与 $y=5-x$ 表示的关系相同.[1]

一般地,以一个二元一次方程的解为坐标的点组成的图象与相应的一次函数的图象相同,是一条直线.

做一做

在同一直角坐标系内分别画出一一次函数 $y=5-x$ 和 $y=2x-1$ 的图象(如图 7-1),这两个图象有交点吗?交点的坐标与方程组

$$\begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1 \end{cases} \text{ 的解有什么关系?}$$

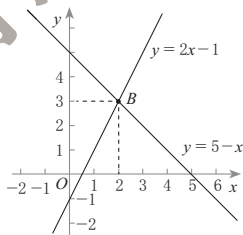


图 7-1

一次函数 $y=5-x$ 与 $y=2x-1$ 的图象的交点为

$$(2, 3), \text{ 而 } \begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases} \text{ 就是方程组 } \begin{cases} x+y=5, \\ 2x-y=1 \end{cases} \text{ 的解.}$$

一般地,从图形的角度看,确定两条直线交点的坐标,相当于求相应的二元一次方程组的解;解一个二元一次方程组,就相当于确定相应两条直线交点的坐标.

想一想

在同一直角坐标系内,一次函数 $y=x+1$ 和 $y=x-2$ 的图象(如图 7-2)有怎样的位置关系?方

$$\text{程组 } \begin{cases} x-y=-1, \\ x-y=2 \end{cases} \text{ 的解的情况如何?你发现了什么?}$$

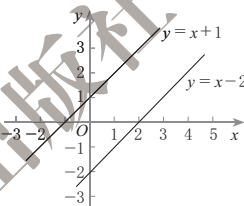


图 7-2

随堂练习

1. 已知一次函数 $y=3x-1$ 与 $y=2x$ 的图象的交点是 $(1, 2)$, 求方程组 $\begin{cases} 3x-y=1, \\ y=2x \end{cases}$ 的解.
2. 有一组数同时适合方程 $x+y=2$ 和 $x+y=5$ 吗? 一次函数 $y=2-x$ 与 $y=5-x$ 的图象之间有什么关系?

习题 7.7

知识技能

1. 已知方程组 $\begin{cases} -3x+y+3=0, \\ 3x+2y-6=0 \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x=\frac{4}{3}, \\ y=1, \end{cases}$ 试求函数 $y=3x-3$ 与 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 的图象的交点坐标.
2. 一次函数 $y=3x-5$ 与 $y=2x+b$ 的图象的交点为 $P(1, -2)$, 试确定方程组 $\begin{cases} y=3x-5, \\ y=2x+b \end{cases}$ 的解和 b 的值.
3. 已知一次函数 $y=2x$ 与 $y=-x+b$ 的交点为 $(1, a)$, 试确定方程组 $\begin{cases} 2x-y=0, \\ x+y-b=0 \end{cases}$ 的解和 a, b 的值.

数学理解

- ※4. (1) 请写出一组二元一次方程组, 使该方程组无解;
 (2) 你还能写出其他无解的二元一次方程组吗? 如果能, 请观察这些方程组中两个方程有什么共同特征.

议一议

A, B 两地相距 100 km, 甲、乙两人骑车同时分别从 A, B 两地相向而行. 假设他们都保持匀速行驶, 则他们各自到 A 地的距离 $s(\text{km})$ 都是骑车时间 $t(\text{h})$ 的一次函数. 1 h 后乙距离 A 地 80 km; 2 h 后甲距离 A 地 30 km. 经过多长时间两人将相遇?

你是怎样做的? 与同伴进行交流.

$$3. \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} a=2, b=3.$$

4. (1) 只要两个方程不能同时成立, 该方程组就无解;
 (2) 无解的二元一次方程组对应的一次函数图象相互平行.

本课时的教学目标为:

1. 理解作函数图象的方法与代数方法各自的特点.
2. 掌握利用二元一次方程组确定一次函数的表达式.
3. 进一步理解方程与函数的联系, 体会知识之间的普遍联系和知识之间的相互转化.

没有一组数同时适合这两个方程. 希望学生通过这一发现进一步体会二元一次方程与一次函数图象之间的关系, 方程组的解与函数图象交点之间的关系, 从“数”“形”两个方面初步体会某些方程组的无解性, 进一步发展学生的数形结合的意识 and 能力.

随堂练习

1. $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$
2. 没有, 一次函数 $y=2-x$ 和 $y=5-x$ 的图象平行. 希望学生进一步体会二元一次方程(组)与一次函数图象之间的关系.

习题 7.7

1. 交点坐标为 $(\frac{4}{3}, 1)$
2. $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases} b=-4.$

议一议

旨在进一步加强方程与函数的联系. 对于这个问题, 由于学生在前一课时已经有了从图形的角度看二元一次方程组的经验, 因此较为自然的做法是画图象, 但画图的结果多是近似的, 难以精确, 因而会考虑有没有其他办法, 如能否确定甲、乙各自的 s 与 t 之间的函数表达式等. 为此, 在学生讨论的基础上, 教科书提供了三个同学的思路, 让学生进行思考和比较, 进而获得从图象等信息确定一次函数表达式的方法, 加强二元一次方程与一次函数的联系.

具体教学中, 可以先让学生自主提出解决方案, 进而交流方案、比较方案, 在这些活动过程中动态地生成相关方法.

例

通过例题让学生了解待定系数法. 待定系数法的一般步骤是: 先写出含字母系数的函数表达式, 再根据题目中的条件确定系数的值.



小明



小颖



小彬

可以分别画出两人 s 与 t 之间关系的图象 (如图 7-3), 找出交点的横坐标就行了!

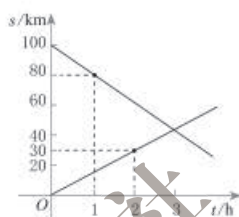


图 7-3

对于乙, s 是 t 的一次函数, 可以设 $s = kt + b$. 当 $t = 0$ 时, $s = 100$; 当 $t = 1$ 时, $s = 80$. 将它们分别代入 $s = kt + b$ 中, 可以求出 k, b 的值, 即可以求出乙的 s 与 t 之间的函数表达式. 同样可以求出甲的 s 与 t 之间的函数表达式, 再联立这两个表达式, 求解方程组就行了!

1 h 后乙距离 A 地 80 km, 即乙的速度是 20 km/h; 2 h 后甲距离 A 地 30 km, 即甲的速度是 15 km/h. 由此可以求出甲、乙两人的速度和.

- (1) 你明白他们的想法吗? 用他们的方法做一做, 看看和你的结果一致吗?
- (2) 小明的方法求出的结果准确吗?

在上面的问题中, 用画图象的方法可以直观地获得问题的结果, 但有时却难以准确. 为了获得准确的结果, 我们一般用代数方法.

例 某长途汽车客运站规定, 乘客可以免费携带一定质量的行李, 但超过该质量则需购买行李票, 且行李费 y (元) 是行李质量 x (kg) 的一次函数. 已知李明带了 60 kg 的行李, 交了行李费 5 元; 张华带了 90 kg 的行李, 交了行李费 10 元.

- (1) 写出 y 与 x 之间的函数表达式;
- (2) 乘客最多可免费携带多少千克的行李?

解: (1) 设 $y = kx + b$, 根据题意, 可得方程组

$$\begin{cases} 5 = 60k + b, \\ 10 = 90k + b. \end{cases}$$

①

②

②-①, 得

$$30k=5,$$

$$k=\frac{1}{6}.$$

将 $k=\frac{1}{6}$ 代入 ①, 得 $b=-5$.

所以 $y=\frac{1}{6}x-5$.

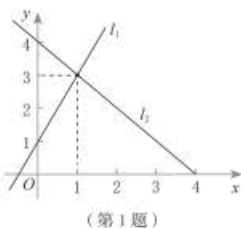
(2) 当 $x=30$ 时, $y=0$.

所以乘客最多可免费携带 30 kg 的行李.

这种先设出含有未知系数的函数表达式, 再根据所给条件确定表达式中的未知系数的方法是待定系数法.

随堂练习

- 如图, 两直线 l_1, l_2 的交点坐标可以看做方程组 的解.
- 在弹性限度内, 弹簧的长度 y (cm) 是所挂物体质量 x (kg) 的一次函数. 当所挂物体的质量为 1 kg 时, 弹簧长 15 cm; 当所挂物体的质量为 3 kg 时, 弹簧长 16 cm. 写出 y 与 x 之间的关系式, 并求当所挂物体的质量为 4 kg 时弹簧的长度.



习题 7.8

问题解决

- 生物学研究表明, 某种蛇的长度 y (cm) 是其尾长 x (cm) 的一次函数. 当蛇的尾长为 6 cm 时, 蛇长为 45.5 cm; 当尾长为 14 cm 时, 蛇长为 105.5 cm.
 - 写出 y 与 x 之间的关系式;
 - 当一条蛇的尾长为 10 cm 时, 这条蛇的长度是多少?
- 为了倡导节约用水, 某城市规定: 每户居民每月的用水标准为 8 m^3 , 超过标准部分加价收费. 已知某户居民某两个月的用水量和水费分别是 11 m^3 、28 元和 15 m^3 、44 元. 用水标准内的水价和超过标准部分的水价分别是多少? 你是怎么做的? 与同伴进行交流.

随堂练习

- $$\begin{cases} x+y=4, \\ 2x-y=-1. \end{cases}$$
- $y=0.5x+14.5$. 当 $x=4$ 时,
 $y=0.5 \times 4 + 14.5 = 16.5$
 (cm).

习题 7.8

- (1) $y=7.5x+0.5$;
 (2) 75.5 cm.
- 标准内水价和超过标准部分的水价分别是每立方米 2 元和每立方米 4 元. 学生的方法将是多样的, 可以通过列二元一次方程组、列一元一次方程、利用函数图象以及小学算术方法等求解.

教学目标

1. 经历三元一次方程组解的探索过程, 进一步体会“化未知为已知”的化归思想.

2. 会用代入消元法和加减消元法解三元一次方程组, 进一步体会“消元”的思想.

正如章前设计思路中所说, 本节为选学内容, 定位是让学有余力的学生感受解三元一次方程组的消元思想, 了解解三元一次方程组的思路, 以便将来利用它们解决简单的实际问题. 而学生前面已经学习了求解二元一次方程组的两种基本方法——代入消元法和加减消元法, 了解了“消元”的思想, 这些学习经验为探索三元一次方程组的解法提供了充分的基础. 因此, 本课时重点在于引导学生自主探索三元一次方程组的解法, 在活动过程中进一步体会“消元”的思想.

*5

三元一次方程组^①

已知甲、乙、丙三个数的和是 23, 甲数比乙数大 1, 甲数的 2 倍与乙数的和比丙数大 20, 求这三个数.

在上述问题中, 设甲数为 x , 乙数为 y , 丙数为 z , 由题意可得到方程组

$$\begin{cases} x+y+z=23, \\ x-y=1, \\ 2x+y-z=20. \end{cases}$$

这个方程组和前面学过的二元一次方程组有什么区别和联系?^[1]

在这个方程组中, $x+y+z=23$ 和 $2x+y-z=20$ 都含有三个未知数, 并且所含未知数的项的次数都是 1, 这样的方程叫做三元一次方程 (linear equation with three unknowns).

像这样共含有三个未知数的三个一次方程所组成的一组方程, 叫做三元一次方程组 (system of linear equations with three unknowns).

三元一次方程组中各个方程的公共解, 叫做这个三元一次方程组的解.^[2]

怎样解三元一次方程组呢?

$$\begin{cases} x+y+z=23, \\ x-y=1, \\ 2x+y-z=20. \end{cases}$$

①
②
③

用代入消元法试一试!

我们会解二元一次方程组, 能不能像以前一样“消元”, 把“三元”化成“二元”呢?^[3]

① 标有*的内容为选学内容, 不作考试要求.

[1] 情境选取的内容比较简单, 便于较快地引出三元一次方程和三元一次方程组. 既然本课时的重点是感受“消元”的思想, 了解运用消元法求解三元一次方程组的思路, 因此, 从生活实例到三元一次方程组的建模就不宜作为教学重点. 当然, 考虑到教材整体风格的一致, 这里还是提供了一个情境, 但情境相对简单, 有助于尽快列出方程组, 逐步过渡到方程组的解法探索.

[2] 类比前面二元一次方程组相关概念的学习, 教科书依次引入了三元一次方程、三元一次方程组和三元一次方程组解的概念.

一般地, 共含有三个未知数的几个一次方程组成的一组方程, 都是三元一次方程组. 需要注意的是, 方程组各方程中同一字母必须代表同一个量.

^[3] 类比二元一次方程组的解题思路，给出解三元一次方程组的思路，让学生进一步体会“化未知为已知”的化归思想：通过“消元”，将“三元”化成了“二元”，就把新问题化归成我们已经会解决的问题了。

教学中，教师也可以直接类比二元一次方程组的解法——代入消元法和加减消元法，让学生尝试用这两种方法解三元一次方程组。

做一做

三元一次方程组由于未知数的增加,更能体现消元的思想,通过消元,把三元一次方程组转化为二元一次方程组,进而转化成一元一次方程进行求解.但如何消元、先消哪个元是需要根据具体问题认真考虑的.

教科书呈现的方法是通过“代入消元法”消去未知数 x ,从而得到二元一次方程组.事实上,具体“消元”的方法可以有多种.本题也可以通过“代入消元法”先消去未知数 y 或 z ,得到二元一次方程组;当然,还可以通过“加减消元法”,如①+③消去未知数 z ,得到二元一次方程组.教师在教学中应鼓励学生选择适合自己的方法进行求解,但需要强调的是:不管采用的是哪种方法,关键的思想都是“消元”.

由方程②得

$$x=y+1. \quad ④$$

把④分别代入①③,得

$$2y+z=22, \quad ⑤$$

$$3y-z=18. \quad ⑥$$

$$\begin{cases} 2y+z=22, \\ 3y-z=18, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} y=8, \\ z=6. \end{cases}$$

把 $y=8$ 代入④,得 $x=9$.

经检验, $x=9, y=8, z=6$ 适合原方程组.

所以原方程组的解是

$$\begin{cases} x=9, \\ y=8, \\ z=6. \end{cases}$$

啊哈,消去了未知数 x ,变成二元一次方程组了,我会解!

检验可以口算或在草稿纸上演算,以后可以不必写出.

做一做

(1)解上面的方程组时,你能用代入消元法先消去未知数 y (或 z),从而得到方程组的解吗?

(2)你还有其他方法吗?与同伴进行交流.

议一议

上述不同的解法有什么共同之处?与二元一次方程组的解法有什么联系?解三元一次方程组的思路是什么?

解三元一次方程组的基本思路仍然是“消元”——把“三元”化为“二元”,再化为“一元”.



议一议

让学生反思上面解三元一次方程组的求解过程,体会不同解法的共同特点,概括解三元一次方程组的基本思路.

教科书以框图的形式给出解三元一次方程组的基本思路,明确不同解法的共同之处都是“消元”,并突出与二元一次方程组解法之间的联系.

至于选取哪种消元法,先消哪个元,则要视具体问题和不同学生而定.

随堂练习

1. 一个三位数, 个位数字与百位数字的和等于十位数字, 百位数字的7倍比个位数字与十位数字的和大2, 个位数字、十位数字与百位数字的和是14. 求这个三位数.
2. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=26, \\ x-y=1, \\ 2x-y+z=18. \end{cases}$$

习题 7.9

知识技能

1. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x+2z=3, \\ 2y+z=7, \\ 2x-y-z=-5; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-y+2z=8, \\ y+2z=-2, \\ 3x+y-4z=1. \end{cases}$$

2. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=10, \\ 2x+3y+z=17, \\ 3x+2y-z=8. \end{cases}$$

问题解决

3. 某校七、八、九年级共有651人, 八年级的学生比九年级的学生人数多10%, 七年级的学生比八年级的学生人数多5%. 求三个年级各有多少学生.
4. 一个三位数, 十位数字比个位数字大2, 百位数字是十位数字的2倍. 如果把百位数字与个位数字对调, 那么得到的三位数比原来的三位数小495. 求原来的三位数.

做一做

用不同的方法解下面的方程组.

$$\begin{cases} x+y=15, \\ x+y+z=5, \\ x+z=20. \end{cases}$$

3. 七年级231人, 八年级220人, 九年级200人.

提示: 可设七年级、八年级、九年级的人数分别是 x 人、 y 人、 z 人, 则有方程组

$$\begin{cases} x+y+z=651, \\ y=(1+10\%)z, \\ x=(1+5\%)y. \end{cases}$$

4. 原来的三位数是631.

提示: 可设这个三位数个位、十位、百位上的数字分别是 x , y , z , 则有方程组

$$\begin{cases} y=x+2, \\ z=2y, \\ x+10y+100z=z+10y+100x+495. \end{cases}$$

随堂练习

1. 275.

提示: 可设这个三位数个位、十位、百位上的数字分别是 x , y , z , 则有方程组

$$\begin{cases} x+z=y, \\ 7z=x+y+2, \\ x+y+z=14. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=10, \\ y=9, \\ z=7. \end{cases}$$

习题 7.9

$$1. (1) \begin{cases} x=-\frac{1}{3}, \\ y=\frac{8}{3}, \\ z=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x=3, \\ y=2, \\ z=5. \end{cases}$$

做一做

可鼓励学生选择不同的方法求解,使学生更好地体会“消元”的思想方法.

随堂练习

$$1. \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3. \end{cases}$$

$$2. a=1, b=-2, c=1.$$

再对这些方法进行比较.

例 已知等式 $y=ax^2+bx+c$, 当 $x=1$ 时, $y=0$; 当 $x=2$ 时, $y=3$; 当 $x=-3$ 时, $y=28$.

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 求当 $x=-1$ 时 y 的值.

解: (1) 根据题意, 可得方程组

$$\begin{cases} a+b+c=0, & \text{①} \\ 4a+2b+c=3, & \text{②} \\ 9a-3b+c=28. & \text{③} \end{cases}$$

②-①, 得

$$3a+b=3. \quad \text{④}$$

③-①, 得

$$8a-4b=28. \quad \text{⑤}$$

解方程组

$$\begin{cases} 3a+b=3, \\ 8a-4b=28, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3. \end{cases}$$

把 $a=2, b=-3$ 代入 ①, 得 $c=1$.

因此 a, b, c 的值分别为 $a=2, b=-3, c=1$.

(2) 当 $a=2, b=-3, c=1$ 时, 等式为 $y=2x^2-3x+1$.

当 $x=-1$ 时, $y=2 \times (-1)^2 - 3 \times (-1) + 1 = 6$.

随堂练习

1. 解方程组:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ 2x+3y+z=11, \\ -3x+y+z=2. \end{cases}$$

2. 已知等式 $y=ax^2+bx+c$, 当 $x=0$ 时, $y=1$; 当 $x=1$ 时, $y=0$; 当 $x=2$ 时, $y=1$. 求 a, b, c 的值.

习题 7.10

知识技能

1. 解下列方程组:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ (1) \begin{cases} 2x+3y+z=6, \\ 3x+y+2z=6; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=1, \\ (2) \begin{cases} -x+y+z=2, \\ x-y+z=3. \end{cases} \end{cases}$$

数学理解

2. 当 $x=0$ 时, 代数式 ax^2+bx+c 的值为 1; 当 x 分别取 1, 2 时, 代数式 ax^2+bx+c 的值都是 0. 当 x 取 -1 时, 代数式 ax^2+bx+c 的值是多少?

回顾与思考

1. 举出生活中运用二元一次方程组解决问题的两个例子.
2. 在列二元一次方程组解决实际问题的过程中, 你认为最关键的是什么?
3. 解二元一次方程组的基本思路是什么? 有哪些方法? 举例说明解二元一次方程组的过程. 解三元一次方程组呢?
4. 举例说明二元一次方程与一次函数有什么关系.
5. 用适当的方法梳理本章的知识, 并与同伴进行交流.

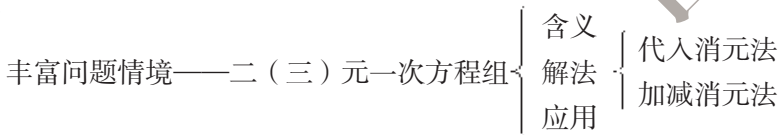
复习题

知识技能

1. 二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-2y=3, \\ x+2y=5 \end{cases}$ 的解是 _____.

$$(1) \begin{cases} x=1, \\ y=0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ y=2; \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x=2, \\ y=\frac{3}{2}; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x=7, \\ y=-1. \end{cases}$$

理, 教师都应给予肯定. 然后开展小组交流和全班交流, 使学生在反思与交流的过程中逐渐建立知识体系. 在学生充分思考和交流的基础上, 教师引导学生共同建立框架图. 下面是一个供参考的知识结构框图.



解二(三)元一次方程组的基本方法是代入消元法、加减消元法, 基本思想是消元: 化三元为二元, 化二元为一元. 应用二(三)元一次方程组解决实际问题的关键在于正确找出问题中的等量关系, 列出方程并组成方程组, 同时注意检验解的合理性. 在回顾与思考的教学中, 务必重视学生

习题 7.10

$$1. (1) \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=1. \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=2, \\ y=\frac{3}{2}, \\ z=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

$$2. 3. \text{提示: } a=\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{2}, c=1.$$

回顾与思考

设立“回顾与思考”的意图是运用问题的形式帮助学生梳理本章所学知识, 建立一定的知识体系.

教学时可以首先鼓励学生独立思考, 自己回顾所学的内容, 并尝试回答教科书中提出的问题. 在对问题进行回答时, 教师应关注学生运用自己的语言解释答案的过程, 关注学生运用例子说明自己对有关知识的理解, 而不是简单复述书上的结论, 学生的答案只要合

的举例,重视学生在实际问题情境中对概念、方法意义的理解,并关注学生所举例子的合理性、科学性和新颖性,从而对学生的认知状况和应用意识作出恰当的评判.

下面的典型例题供参考.

例 某酒店客房部有三人间普通客房、双人间普通客房,收费标准为三人间 150 元/间,双人间 140 元/间.

为吸引游客,实行团体入住五折优惠措施.一个 46 人的旅游团优惠期间到该酒店入住,住了一些三人间普通客房和双人间普通客房.若每间客房正好住满,且一天共花去住宿费 1 310 元,则旅游团住了三人间普通客房和双人间普通客房各多少间?

分析: 本题主要考查学生应用二元一次方程组解决实际问题的能力.思考的角度不同,选择的未知数、列出的方程组也不同.

解: 解法一: 设三人间普通客房和双人间普通客房各住了 x 间、 y 间,根据题意,得

$$\begin{cases} 3x + 2y = 46, \\ 150 \times 0.5x + 140 \times 0.5y = 1\,310. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 10, \\ y = 8. \end{cases}$

答: 三人间普通客房、双人间普通客房各住了 10 间和 8 间.

解法二: 设三人间普通客房和双人间普通客房各住了 x 人、 y 人,根据题意,得

$$\begin{cases} x + y = 46, \\ 150 \times 0.5 \times \frac{x}{3} + 140 \times 0.5 \times \frac{y}{2} = 1\,310. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x = 30, \\ y = 16. \end{cases}$

$$\frac{30}{3} = 10 \text{ (间)}, \quad \frac{16}{2} = 8 \text{ (间)}.$$

答: 三人间普通客房、双人间普通客房各住了 10 间和 8 间.

总结: 本题给出了两种解法,解法一更直接一些,解法二也不复杂,同时它启发我们可以变换角度去思考和解决问题.

复习题

1. C.

2. (1) $\begin{cases} x = 5, \\ y = 5; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 7; \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x = \frac{5}{8}, \\ y = -\frac{9}{8}; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = -\frac{11}{13}, \\ y = -\frac{23}{13}; \end{cases}$ (5) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ z = 5. \end{cases}$

2. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 2x-y=5, \\ 7x-3y=20; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x-y=1, \\ y=2x+3; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5x+y=2, \\ x-3y=4; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x-2y=1, \\ 2x+3y=-7; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & z=x+y, \\ \text{※}(5) & \begin{cases} 2x-3y+2z=5, \\ x+2y-z=3. \end{cases} \end{aligned}$$

3. 若 $\begin{cases} x=1, \\ y=3 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x=0, \\ y=-2 \end{cases}$ 都是方程 $ax-y=b$ 的解, 求 a 与 b 的值.

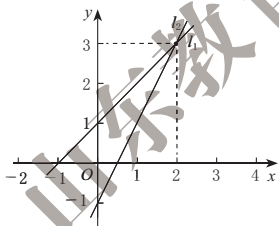
※4. 在代数式 ax^2+bx+c 中, 当 $x=-1, 1, 2$ 时, 代数式的值依次是 $0, -8, -9$.

(1) 求 a, b, c 的值;

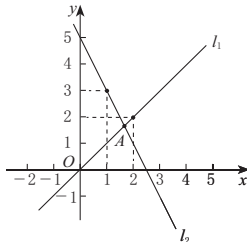
(2) 当 $x=0$ 时, 求这个代数式的值.

数学理解

5. 如图, 直线 l_1, l_2 的交点坐标可以看做方程组 _____ 的解.



(第5题)



(第6题)

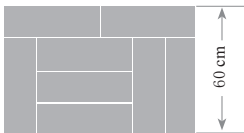
6. 如图, 直线 l_1, l_2 相交于点 A . 试求出点 A 的坐标.

7. 编一个二元一次方程组, 使它的解是 $\begin{cases} x=-2, \\ y=4. \end{cases}$

问题解决

8. 某长方形的周长是 44 cm , 若宽的 3 倍比长多 6 cm , 则该长方形的长和宽各是多少?

9. 如图, 8 块相同的长方形地砖拼成一个大长方形, 每块长方形地砖的长和宽分别是多少?



(第9题)

7. 这样的方程组很多, 如 $\begin{cases} x+y=2, \\ 2x-y=-8 \end{cases}$ 等, 本题意在加强对方程组的解的认识.

8. 长方形的长和宽分别为 15 cm 和 7 cm .

提示: 可设长方形的长和宽分别为 $x \text{ cm}$ 和 $y \text{ cm}$, 则有方程组 $\begin{cases} 2(x+y)=44, \\ 3y-x=6. \end{cases}$

9. 长方形地砖的长和宽分别为 45 cm 和 15 cm .

提示: 可设地砖的长和宽分别为 $x \text{ cm}$ 和 $y \text{ cm}$, 由图可知, 长是宽的 3 倍, 则有方程组

$$\begin{cases} x+y=60, \\ x=3y. \end{cases}$$

3. a 与 b 的值分别为 5 和 2 .

4. 这里实际上是用“待定系数法”求 a, b, c 的值.

(1) $a=1, b=-4, c=-5$;

(2) $x=0$ 时, 值为 -5 .

$$5. \begin{cases} x-y=-1, \\ 2x-y=1. \end{cases}$$

6. 可先分别求出直线 l_1, l_2 的方程. 如设 l_2 的方程为 $y=kx+b$, 因为 l_2 经过点 $(0, 5)$,

$$(1, 3), \text{ 所以 } \begin{cases} 5=b, \\ 3=k+b. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k=-2, \\ b=5. \end{cases}$ 即 l_2 的方程为 $y=-2x+5$. 同理可求出

l_1 的方程为 $y=x$. 联立, 得

$$\begin{cases} y=x, \\ y=-2x+5. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{5}{3}, \\ y=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

所以点 A 的坐标为 $A(\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$.

10. $A = 40^\circ$, $B = 70^\circ$.

11. 甲组一天生产500个, 乙组一天生产600个.

提示: 可设甲组一天生产 x 个产品, 乙组一天生产 y 个产品, 则有方程组

$$\begin{cases} 6x = 5y, \\ 300 + 4x + 100 = 4y. \end{cases}$$

12. 船在静水中的速度为 18 km/h , 水流速度为 2 km/h .

提示: 可设船在静水中的速度为 $x \text{ km/h}$, 水流速度为 $y \text{ km/h}$, 则有方程组

$$\begin{cases} 4(x+y) = 80, \\ 5(x-y) = 80. \end{cases}$$

13. 实际生产水稻 11.5 t , 小麦 5.5 t .

提示: 可设该专业户去年计划生产水稻 x 吨, 小麦 y 吨, 则有方程组

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ (1+15\%)x + (1+10\%)y = 17. \end{cases}$$

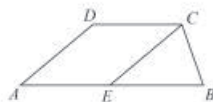
14. 商品进价 155 元, 定价为 200 元.

提示: 可设该商品进价为 x 元, 定价为 y 元, 则有方程组
$$\begin{cases} y - x = 45, \\ 8(85\%y - x) = 12(y - 35 - x). \end{cases}$$

15. 甲、乙商品进价分别为 150 元和 200 元.

提示: 设甲、乙商品进价分别为 x 元和 y 元, 则有方程组

10. 如图, 梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E 在 AB 上, $CE \parallel AD$, 且 $BE = CE$, $\angle B - \angle A = 30^\circ$, 求 $\angle A$, $\angle B$ 的度数.



(第10题)

11. 某厂的甲、乙两个小组共同生产某种产品. 若甲组先生产1天, 然后两组又一起生产了5天, 则两组产量一样多. 若甲组先生产了300个产品, 然后两组同时生产4天, 则乙组比甲组多生产100个产品. 两组一天各生产多少个产品?

12. A, B 两地相距 80 km . 一艘船从 A 出发, 顺水航行 4 h 到 B , 而返回时逆水航行 5 h 到 A . 已知船顺水航行、逆水航行的速度分别是船在静水中的速度与水流速度的和与差, 求船在静水中的速度和水流速度.

13. 某粮食生产专业户去年计划生产水稻和小麦共 15 t , 实际生产了 17 t , 其中水稻超产 15% , 小麦超产 10% . 该专业户去年实际生产水稻、小麦各多少吨?

14. 某商场按定价销售某种商品时, 每件可获利 45 元; 按定价的八五折销售该商品8件与将定价降低 35 元销售该商品12件所获利润相等. 该商品进价、定价分别是多少?

15. 某商场购进商品后, 加价 40% 作为销售价. 商场搞优惠促销, 决定由顾客抽奖确定折扣. 某顾客购买甲、乙两种商品, 分别抽到七折和九折, 共付款 399 元, 两种商品原销售价之和为 490 元. 甲、乙两种商品进价分别为多少元?

16. 列方程组解古算题:

“今有甲、乙二人持钱不知其数. 甲得乙半而钱五十, 乙得甲太半而亦钱五十. 甲、乙持钱各几何?”

题目大意是: 甲、乙两人各带了若干钱. 如果甲得到乙所有钱的一半, 那么甲共有钱 50 . 如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$, 那么乙也共有钱 50 . 甲、乙两人各带了多少钱?

17. 某景点的门票价格规定如下表:

购票人数	1~50	51~100	100以上
每人门票价(元)	12	10	8

某校七年级一班和二班共 102 人去该景点游览, 其中一班人数较少, 不到 50 人, 二班人数较多, 有 50 多人. 如果两个班都以班级为单位分别购票, 则一共应付 1118 元; 如果两班联合起来作为一个团体购票, 则可以节省不少钱. 两班各有多少名学生? 联合起来购票能省多少钱?

联系拓广

※18. 方程组 $\begin{cases} -2x+y=3, \\ 4x-2y=-6 \end{cases}$ 的解是什么? 两个方程对应的两个一次函数的图象有怎样的位置关系? 你能从中悟出些什么?

$$\begin{cases} 0.7(1+40\%)x + 0.9(1+40\%)y = 399, \\ (1+40\%)x + (1+40\%)y = 490. \end{cases}$$

16. 甲带钱 $37\frac{1}{2}$, 乙带钱 25.

提示: 可设甲带钱 x , 乙带钱 y , 则有方程组 $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 50, \\ \frac{2}{3}x + y = 50. \end{cases}$

17. 设一班、二班人数分别为 x 人和 y 人, 则有 $\begin{cases} x + y = 102, \\ 12x + 10y = 1\,118. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 49, \\ y = 53. \end{cases}$ 所以, 一

班、二班分别有 49 人和 53 人. 联合起来购票能省 $1\,118 - 102 \times 8 = 302$ (元).

18. 方程组 $\begin{cases} -2x + y = 3, \\ 4x - 2y = -6 \end{cases}$ 有无数多组解, 方程组所对应的两个一次函数的图象 (两条直线) 重合. 本题旨在让学生进一步体会方程组的解与相应图象之间的关系, 感受方程组有无数多组解的条件.

附录 典型案例评析

让学生在探究、合作与交流中进行数学复习

——一节二元一次方程组复习课的实录与评析

设计：四川省成都市龙泉驿区教育局教研室 王富英

评析：四川省成都市龙泉驿区教育局教研室 王富英

一、学情分析

师：同学们，今天一起复习研究二元一次方程组及其解法这一章的内容。昨天我已经请大家把二元一次方程组这部分知识进行了归类、整理。现在请一位同学展示一下自己的知识归类整理的情况，哪一位先来？

这里教师是要求学生展示自己的成果，而不是要求学生回答教师提出的问题，把学生真正作为学习的主体来对待，充分发挥了学生的主体作用。

生1（白凤友）：我是按教科书的编写顺序整理的（展示台展示）（略）。

生2（邹巧）：我是从二元一次方程的整体结构进行整理的，我分为四部分：

（1）二元一次方程（组）的有关概念

二元一次方程
二元一次方程组
二元一次方程的解
二元一次方程组的解
解二元一次方程组

（2）二元一次方程组的解法

加减消元法
代入消元法
图象法

（3）二元一次方程与一次函数之间的关系：一个二元一次方程的图象是一条直线。因此，二元一次方程组解的情况就可由平面上方程组对应的两条直线的位置关系确定。两条直线平行时方程组无解；两条直线相交时方程组有一个解；两条直线重合时方程组有无穷多组解。反过来也成立。

（4）二元一次方程组的应用：① 求待定系数的值（例略）；② 解应用问题（例略）等。

师：两位同学从不同的角度对本章知识进行了归类整理，都很不错。但比较而言，你们更喜欢哪位同学的？

生众：邹巧同学（生2）！

师：第一位同学是按教科书的顺序进行整理，这对于初学整理的同学也是一种常用的

方法,但是第二位同学的整理把握住了这章知识的整体结构,她对每一种情况还举例给予了说明,理解得更加深刻.两位同学都不错!大家以后再进行整理总结时要向她们学习.这里,我也对这一章的知识进行了归纳整理,现在大家可以看一看(多媒体展示,结果与学生的比较,还不如第二位同学的好).同学们可以看出,教师整理的还不如你们整理的好,同学们比教师还聪明.其实只要大家勤于思考,多动脑、动手,一定会有重要的发现和收获的.

先由学生自己对该部分知识进行归纳总结,在课堂上展示后再通过师生的共同评价修正,从而帮助学生建立整体性的认知框架,完善认知结构;同时,学生的主动性和积极性得到了充分的发挥,比只由教师讲解学得主动、理解深刻.

心理的安全和自由是学生创造性思维的必要条件.教师以一个参与者的身份积极参与交流与评价,并勇于承认自己的不足,使学生感到教师对他们敞开了心怀,可亲可敬,从而使学生获得了一种心理的安全和自由,为学生大胆地探索、积极交流,营造了宽松的心理环境和民主、平等、和谐的课堂环境.

师:现在我们来看下面的一个例子:

例1 解方程组:
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = 7, \\ \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 3. \end{cases}$$

大家先尽量用多种解法自己求解,然后在学习小组内交流,比较哪种解法好,最后各组推出最好的解法在全班交流.

利用小组学习的形式,给每个学生提供更多合作交流的机会,使课堂面向全体学生得到了真正的落实.

(学生解题,小组内交流、讨论,教师巡视、指导)

师:我看大家都已得出了该题的解答,有些组的解法我都没想到,现在请各组展示你们的优秀成果.在展示时要求要与别人的解法不相同.

生3(一组):我们是先用去分母把方程组化简整理后用加减消元法求得解答的.

生4(三组):我们在化简整理后用的是代入消元法求得解答的.

生5(四组):我们用的是换元法.令 $x+y=m$, $x-y=n$, 然后求解.

生6(二组):我们没有直接换元,而是把 $\frac{x+y}{2}$ 和 $\frac{x-y}{3}$ 看成一个整体,通过心算就可得到 $\frac{x+y}{2} = 5$, $\frac{x-y}{3} = 2$. 由此得 $\begin{cases} x+y=10, \\ x-y=6. \end{cases}$ 再通过心算即得方程组的解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$

(全班自发地鼓掌)

师:太棒了!还有没有其他解法?

(学生都积极进行思考)

生7(三组):把原方程组化简后用图象法解.

生8(四组):换元后用图象法解.

生8的发言显然是受到了生7的启发.在相互交流、讨论过程中,学生的思想在碰撞,思维的灵感、创新的火花不断显现.

师:同学们的发言很好,把老师想要讲的都说了.现在大家对四个组得出的四种不同解法进行一个评价,看哪个组的解法最好.

把评价纳入学生的学习过程之中,用评价来激发学生的学习兴趣,从而使评价成为促进学生主动学习的一部分.同时通过对几种不同解法优劣的比较和鉴别,可培养学生思维的批判性和养成解题后反思的良好习惯.

生9(五组):我认为,一组和三组的解法很好,因为这是解二元一次方程组的常用方法.我们组也都是用的这两种解法.

生10(六组):我认为四组的解法更好.虽然一组和三组的解法是常用的解法,但计算较繁.四组的解法通过换元,使形式更简单了,便于计算,且不易出错.

生11(一组):虽然换元后形式要简单一些,但要解两次方程组,增加了解方程组的次数,并不一定就简单!

生6:我认为,我们组的解法最简单、最好.我们在解该题时,根据该题的特点,利用了换元的想法但没有换元,而是把 $\frac{x+y}{2}$ 和 $\frac{x-y}{3}$ 看成一个整体进行求解,整个解的过程基本上没有动笔就得出了答案,并且不易出错.

生5:我也认为二组的解法比我们组的好.

生11:我赞同生6的意见.我还想说一点.本题除了最好的解法以外,我认为,本题用图象法解是最不好的解法.因为,当你画好图象时,我已经解出答案了.用图象法解,不但费时,而且由于画的图象不准确,得出的解还只是一个近似解而不是准确值.

教师原先的设计只是想通过比较评出最优秀的解法,而学生不但评出了最优解法,而且对每种解法的优劣还进行了相互比较评价,完全超出了教师的设想.实际上学生的评价才是全面、公正和最有价值的.在许多时候,学生的智慧往往要超过教师!

师:同学们分析得很好.通过比较、分析,大家是否都认为第二组的解法最好?

生众:第二组的解法最好!

师:我赞同大家的意见.其实,各组的解法有各自的特点,他们分别是不同的角度进行的.第二组同学的解法是在认真审题、仔细观察题目特征的基础上,运用了两种数学思想方法从而快速、准确地得出了问题的解答.这两种数学思想方法是“换元的思想”和“整体的思想”.第二组同学的解答给我们一个很好的启示:在解题时,一定要认真审题,仔细观察题目的特征,灵活选用解题的方法,并恰当地运用数学思想方法来指导解题,可提高我们的解题效率.若长期这样进行下去,可形成良好的数学思维策略,提高解题能力.

数学思想方法是数学的精髓和灵魂,是数学知识在更高层次上的抽象和概括.利用数学思想方法来指导数学学习和解题,往往能提高学生的数学学习效率,达到事半功倍的效果.但数学思想方法不是游离于数学知识之外的,而是渗透在数学知识的发生、发展和运用的

过程之中的.这就要求教师要有目的地及时总结提炼,将数学思想方法的学习有机地融入学生的数学学习过程之中.这里,教师把自己置于一个参与者的身份,参与学生的讨论,并将学生讨论中出现的数学思想方法及时地进行总结提炼,使学生认识到数学思想方法在数学学习中的重要价值和作用,从而将数学思想方法的学习有机地渗透其中,使整个讨论和学生的认识上升到一个新的高度.

师:刚才方程组的解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$ 现在我们反过来思考:解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$ 的方程组,除例

1 外还有哪些?你们能否自己编一道与例 1 的方程组的解相同的数学问题?看谁编的问题新颖、独特,形式多样.

教师是学生学习活动的组织者和引导者,此处教师从反面提出问题,引导学生再次投入到新的探索活动中去.

(学生积极地思考、探究;教师在班级巡回指导,时而作为顾问回答学生提出的问题,时而给予学生必要的指导,时而参与学生的讨论、交流)

生 12:何老师,我认为解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$ 的方程组除例 1 外还有:

$$(1) \begin{cases} x+y=10, \\ x-y=6; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x+y=18, \\ x-3y=2. \end{cases}$$

师:是否只有这两个方程组?

生 12:不是,还有很多个.

生 13:已知 $|x-4y|+\sqrt{x+y-10}=0$, 则 $x=$ _____, $y=$ _____.

师:这是利用非负数的性质以填空题的形式编制的习题,很好!(把题写在黑板上)还有其他形式的吗?

生 14:有!我编了一道题:

已知: $-3a^x b^y$ 与 $7a^{4y} b^{x-6}$ 是同类项,求代数式 $2x^2-3y+1$ 的值.

师:好!这位同学是把同类项的概念与解方程组融为一体编制的,很有新意(把题写在黑板上).

生 15:我编制了一道选择题:下列方程组中,解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$ 的方程组是 ().

$$(A) \begin{cases} x+y=10, \\ x-2y=4; \end{cases} \quad (B) \begin{cases} x+y=1, \\ x-y=2; \end{cases} \quad (C) \begin{cases} x+2y=11, \\ 3x-2y=18; \end{cases} \quad (D) \begin{cases} x-2y=5, \\ 3x-2y=8. \end{cases}$$

师:很好!与众不同.(把题写在黑板上)

生 16:我还有一道题:

是否存在整数 m, n 同时使关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} \frac{x+m}{2} + \frac{y+n}{2} = 8, \\ (5x-7y)m = 36 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} mx-2y=4, \\ 2x+ny=26 \end{cases}$

的解都为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2. \end{cases}$ 如果有,请求出 m, n 值;如果没有,请说明理由.

师：他出的是一道探索性问题，很有创意。（掌声）这种题型是近几年中考试题中经常遇到的，它对考察同学们的探究能力十分有利，因此，大家要注意这种题型的解法和作用。（把题写在黑板上）

以上大家都是着眼于解为 $\begin{cases} x=8, \\ y=2 \end{cases}$ 而编制的习题，有谁编制的习题需要用例 1 的方程组来求解的？请上黑板板书、讲解。

生 6：有！我编了一道文字题。（上黑板板书习题）

有一个两位数，它十位上的数字与个位上的数字和的一半加上十位上的数字与个位上的数字的差的 $\frac{1}{3}$ 等于 7；它十位上的数字与个位上的数字和的一半减去十位上的数字与个位上的数字的差的 $\frac{1}{3}$ 等于 3。求这个两位数。

如果分别设十位上的数字为 x ，个位上的数字为 y ，得到的方程组就是例 1 的方程组。所以，这个两位数是 82。

生 17：我编了一道应用题。（上黑板板书习题）

一个笼子里有一些鸡和鸭。已知鸡的总数和鸭的总数的和的 $\frac{1}{2}$ 与鸡的总数和鸭的总数的差的 $\frac{1}{3}$ 相差 3 只；鸡的总数和鸭的总数的和的 $\frac{1}{2}$ 与鸡的总数和鸭的总数的差的 $\frac{1}{3}$ 一共刚好 7 只，问：这个笼子里的鸡和鸭各有多少只？

生 18：我所编的题不是利用例 1 的方程组来解，但仍然是用二元一次方程组来解的。（上黑板板书习题）

有一个运输队承包了一家公司运送货物的业务。第一次运送 18 t，派了一辆大卡车和 5 辆小卡车；第二次运送 30 t，派了一辆大卡车和 11 辆小卡车，并且两次所派的车都刚好装满。问：两种车型的载重量各是多少？

师：这位同学没有局限于我们提出的问题，而是作了进一步的拓展。思路开阔，并且所编的问题，语言表述清楚，思维严谨，很不错！（掌声）

生：何老师，我还有！我还有！

这时，下课铃响了，教师及时地作了总结。许多学生为自己的成果没有得到展示而懊悔不已。

师：同学们今天思路开阔，思维活跃，充分发挥和展示了你们的聪明才智。你们编制的许多问题，我课前都没有想到，很了不起！我今后还要向同学们学习（几句简短的激励性评价语言，把教师置于与学生同等的位置，拉近了师生之间的距离，增进了师生情感；同时，又增强了学生的成就动机，激发了学生学习和探究数学的兴趣与积极性）。由于时间关系，有许多同学的成果还没有得到展示，因此，今天的作业就是每个同学自己编五道形式不同但都要用到二元一次方程组来解的习题，编好后写出它的解答过程，看谁编得好。同时总结这一章的主要题型和解题规律、自己在学习这一章时的心得体会或者自己的新发现。

这里教师的作业布置,不是随便点几道习题让学生做,而是让学生自己编题、解答和总结,在反思总结中,提高学生的学习效率,促进良好的数学学习习惯和方法的养成。

二、评析

这节课,深深地触动了所有与会教师。课后,我和何老师进行了交流,他说:“这节课完全出于我的想象之外。我原先设计为主要通过教师的讲解和各种题型的练习来复习巩固这一章的知识与技能。上次我听了你的建议后,提出了今天的设计方案。说实话,我当时心中没有底。特别是各种不同题型的编制,我认为学生不可能编得那么全面、深入。而课堂上学生的表现简直让我惊讶。想不到学生的思维那么活跃,能力那么强。他们所编的习题类型不但覆盖了我设计的类型,而且有些还超出了我的思考。学生真是太聪明了!”

随后,我又组织学生进行了座谈。学生的反映更是热烈。且听听他们的心声:“以前的复习课,全由老师讲,我们很多同学听一会儿就分散精力,有一些学生根本就没有听。课后作业许多同学没有认真地独立完成,有一些还抄别人的。一章复习完后许多知识没有真正弄清楚,迷迷糊糊的。”“今天的课,课前老师让我们自己先对这一章进行整理,而且说课堂上要展示,大家都认真地进行了复习整理。除了自己看书上的内容外,我们还翻阅了一些参考资料,与同学进行了讨论。这样老师还没有上课,我们对这一章的知识及相互之间的关系就基本上复习和了解了。课堂上再通过展示大家的整理和教师的讲解,使我们既看到了到自己的不足,又学习到了别人的方法,进一步加深了对这一章知识的理解与掌握,印象十分深刻。特别是让我们自己编题,大家积极性都很高,都在认真地进行。”“当听(看)到别人编得很有新意时,也启发了自己的思路,产生了一些新的想法。”“以前老师布置的各种不同类型的习题,我们只是为了完成作业,从没有认真去想一想它们之间有何联系和规律。今天通过我们自己编制并展示了各种不同的类型,使我们看到了这些不同类型习题的解题规律和相互之间的联系,我们觉得这些题简单多了。”“老师,今后的课都应该这样上,让我们先自己去做一做,再交流,通过交流,可以互相启发,这样我们收获要大得多。”

复习课如何体现新课程的教学理念,改变学生的学习方式,提高复习课的效率,是新课程试验中需要研究的课题。在设计这节课时,我们在明确复习课的目的、任务的前提下,以培养学生能力、促进学生发展为指导思想,遵循复习课教学原则中的系统性原则和主体性原则,以学生的“学”为出发点,将“自主探究、合作交流”的学习方式贯穿于课的始终,并将评价与教师的教和学生的学有机地融为一体。实践证明,复习课中,只要教师转变观念,设计合理,组织得当,恰当地运用评价的激励与促进作用,“自主探究、合作交流”的学习方式可以充分激发和调动学生学习的积极性和主动性,获得理想的复习效果。

综合与实践 哪一款“套餐”更合适

一、教学目标

1. 经历从实际问题中抽象出一次函数，主动寻找一次函数的生活背景等活动，感受一次函数的广泛应用，提高应用意识、丰富数学活动经验，并提高建模意识和建模能力。
2. 感受一次函数中“ k ”“ b ”的意义，提高对一次函数的认识。

二、设计思路

本课题的意图是，让学生经历应用一次函数的知识、方法和观点分析问题、解决问题的过程，以帮助学生进一步体会一次函数的模型思想，理解相关的知识与方法，丰富数学活动经验，提高建模意识和建模能力。

学生在六年级下学期学习了“变量之间的关系”，从数学的角度研究过变化的量，并讨论它们之间的关系；本学期又学习了函数的概念，并研究了一次函数的图象、表达式的确定及其应用等，学生已初步具有概括函数关系的能力；但教科书中的情境相对较为简单，在现实而复杂的情境中抽取一次函数模型并利用它解决实际问题，对学生是一个挑战，但也更有助于发展学生的能力，为此，教科书选择了“哪一款套餐更合适”这一素材。

哪一款手机资费的“套餐”更合适，十分现实，其结果对人们的工作、生活具有指导意义。要解答这个问题，需要学生在真实的情景中，分析各种影响因素，确定主要关注的因素，进而确立数学模型、解决问题；这样的过程，离不开学生的独立思考，同时更需要同伴的合作交流，如进行调查访谈等；解决问题的过程，既是对学生有关一次函数知识的一次综合检阅，又可以很好地帮助学生体验研究过程，了解研究方法，培养问题意识，讲究科学态度，提高建模能力，激发创新精神。

根据函数表达式自行构造适合的应用情境，可以更好地实现由意义理解到自主建构的飞跃，进一步加深对“生活数学化、数学规律化、数学生活化”的体验，故此，教科书最后又编制了一个“做一做”的活动，引导学生自主寻找生活中的一次函数的背景，力图发展学生的数学应用意识，形成数学地看待世界的眼光。

三、教学建议

1. 根据学生情况，灵活选取教学方式。

本课题学习的重点是让学生经历过程、感悟方法。经过六年级的学习，学生已经积累了较丰富的课题研究经验，因此，在学生学力许可的情况下，尽可能更好地发挥学生的主体性，建议让学生组成课外研究小组，自主研究，并撰写研究报告，进而进行班级的交流、评点；当然，考虑到本课题的复杂性、标准的多样性等，也可采用教师引导下的课堂学习方式。具体选用哪种教学方式，请教师根据学生先前的活动情况和学力水平，灵活处理。

如果采取教师引导下的课堂学习，建议安排两课时。第1课时引导学生研究具体的背景问题“哪一款套餐更合适”；第2课时，在第1课时的基础上，汇报各组的研究成果，进

行班级点评,并进一步研究“议一议”的问题,寻找更多的生活背景.当然,也可以将寻找生活中有关背景的任务作为第2课时的课前作业,因此,第2课时完全就是一个汇报、交流与评析工作.

2. 加强对学生学习的指导.

“哪一款套餐更合适”涉及的量比较多,一些学生对其中的一些术语不甚了解,影响因素也比较多,其建模过程对部分学生有困难,因此应加强对学生的指导.不管采取课外学习还是课堂教学的形式,注意引导学生充分认识背景,认识背景是解决问题的基础.当然,认识背景,教师可以适时地给予帮助、解释,也可以进行班级学生的交流,在交流中形成正确的认识.

3. 关注学生对“ k ”“ b ”的现实意义的理解.

生活情境中的函数,其参数往往具有现实意义,认识这些参数的现实意义,既可以加深学生对该函数的理解,又可以引领学生结合这些参数的现实意义更好的解决问题,因此,对于具有现实背景的一次函数问题,需要关注学生对其中参数“ k ”“ b ”的现实意义的理解.

4. 根据学生情况,灵活选取研究素材.

本课题学习的文本只是提供了一个教学素材及其使用方向,各位教师完全可根据自己的教学实际,选择其他生活中的一次函数,如怎样进行组合购物可以使花费更少而又物有所值等.

四、评价建议

1. 关注对学生活动过程和课题研究报告的评价.

本课题的评价重心是:

(1) 评价合作小组的构成及分工是否清晰明确,每个成员是否各尽所能;对小组成员的合作意识做出评价.

(2) 对小组完成的课题报告做出评价.

针对各合作小组完成的课题报告进行评价,建议采用四个评价等级:A、B、C、D,分别对应:优秀、良好、中等、基本合格.一般情况,尽量不给予不合格的评价,除非其与D级水平有明显差异.下面的等级表现描述,供教师参考:

D等级:没有根据问题背景提出问题,但选择了部分信息,并完成了一些基本任务,如:表述通话时长与费用的函数关系,完成上述各函数的图象,其中部分正确.根据所画的图象,选择的套餐存在问题.只能部分获得数学模型的解(包括对解的表达存在辞不达意现象).能选择部分信息,部分正确地分析说明一种所适用的消费群体.

C等级:没有根据问题背景提出问题,但能够选择解决问题所需信息.填写通话时长与费用的函数关系,基本正确地完成上述各函数的图象(可能存在表述不清的现象).根据所画的图象,选择正确的套餐.能基本正确地获得数学模型的解,但表述条理不是很清楚,关键点抓得不是很到位.能基本正确地说明几种所适用的消费群体.

B 等级：根据问题背景提出问题，能够选择解决问题所需信息，没有阐述清楚为什么选择这些信息. 能够填写通话时长与费用的函数关系，完成上述各函数的图象，完全正确，表述清晰. 能够根据所画的图象，选择正确的套餐，并能简要说明你为什么选择这种套餐. 能完整正确地获得数学模型的解，表述条理清楚，关键点抓得很到位. 能收集信息，能完整正确地说明各种所适用的消费群体.

A 等级：在 B 等级的基础上，具有独特见解或创新性思考. 能收集信息，完整正确地分析说明各种所适用的消费群体，能发现一些解决同类问题的规律或者能对同类问题产生联想.

2. 注意对小组内成员的评价.

下面是一个老师设计的学生评价表，供参考. 当然，老师们应根据自己课堂学习的方式制定更为贴合的评价表.

评价报告（学生用）

小组成员	姓名	分工	课前准备 (满分10分)	合作交流 (满分10分)	自己任务完成 情况(满分10分)	合计
A		负责分析材料中的信息， 对所需信息做出决定				
B		画图象				
C		提出一些建议				
D		写报告，展示成果分析 个性化建议				
小组合 计得分						

综合与实践

哪一款“套餐”更合适

手机是人与人沟通的重要工具，它给人们的生活带来了许多方便。你了解哪些与手机资费相关的专业术语？你知道有哪些手机资费套餐？它们的收费标准是怎样的？^[1]

假如你家刚刚添置了一部手机，下表是家长获得的一份手机资费宣传单，选择其中哪一款手机资费的“套餐”更合适？你能给你的家长出出主意吗？^[2]

套餐名称	资费内容				备注
	月租	本地主叫	长途主叫	本地以及长途被叫	
A	0月租	0.2元/分	0.28元/分	免费	2元来电宝+3元来电显示+5元炫铃 市话最低消费40元；套餐最低月消费50元
B	0月租	0.18元/分	0.3元/分	免费	市话最低消费60元；套餐最低月消费70元
C	0月租	0.15元/分	0.3元/分	免费	3元来电宝+3元来电显示+3元来电宝或新闻早晚报 市话、国内长途月最低消费66元；套餐最低月消费72元

做一做

以小组为单位合作完成下列任务。

(1) 分析资费宣传单，思考每月的资费受哪些因素影响，影响资费的通话

了解家长的具体话费情况做起；而为了帮助有效地整理话费情况，又不妨提供给学生一个表格等。下面是某个老师设计的导学方案：

(1) 以爸爸或妈妈的手机为样本，调查连续五个月来手机通话时间的情况。（下面为样本表格）

	本地通话时间 (分)	本地通话费用 (元)	长途通话时间 (分)	长途通话费用 (元)	通话总时间 (分)
1					
2					
3					
4					
5					

^[1] 意图以一个实际的例子，引起学生对现实问题的关注与思考，为进一步的探究做准备，完成课题导入。教师可以课前指导学生通过查资料或实际采访等方式，展开实践调查，收集有价值的信息，并对收集到的信息进行简单说明，这样有助于学生更好地理解问题情境及课题的主旨，有效提高课堂探究效率。

^[2] 此处呈现一个素材作为师生分析问题的载体，方便师生就同一个资源进行研究。教学中可以根据当地的实际情况选择更贴切的数据，也可以在学生收集数据基础上让他们自主选择数据。

与之前较为简单的问题背景不同，学生此次面临的问题要现实、复杂得多。哪些是常量？哪些是变量？怎样平衡和表达它们之间的关系？学生很可能无所适从，为此教师可以提供一些帮助，如引导学生从

(2) 完成对教师所提供资费宣传单的信息解读、分析, 独立思考“每月的资费受哪些因素影响?”, 从资费宣传单中抽取有关的数量关系, 建立相应的表达式, 前置诊断, 为下一环节扫清学生理解上的障碍.

做一做

情境中因素较多, 为方便学生合理地选择与使用, 给探究提供线索支持而提出上述4个问题, 意在引导学生做到: 发现、理解所关注的信息并用符号呈现; 根据各组特定要求选择合适的方式分析解释信息.

小组合作生生互动可以实现经验共享, 并使问题优化集中、更具有典型性, 保障课堂教学效益. 教师要引导学生自主思考所选定的变化量与费用之间的关系, 影响所选定费用的主要变量是什么, 现在变量超出一个该如何解决等, 并鼓励学生探讨此对问题结果的影响;

在亲身经历中关注现实生活中确实存在的现象, 思考如何去掉非本质因素的干扰——解决含有多个变量的问题时, 可以分析这些变量之间的关系, 从中选出有代表性的变量作为自变量, 进而寻求可以反映实际问题的函数, 作为解决问题的数学模型.

可以借助这样一个表格, 体现主叫通话时间与费用之间的数量关系;

套餐名称	计费方式	主叫时间与费用的函数关系

时间有哪些.

(2) 了解你家某部手机若干月的各项通话时间, 思考影响该手机资费变化的主要因素是哪项通话时间.

(3) 固定其他通话时间, 分别确定三种套餐下相应的资费和通话时间之间的函数表达式, 并解释所得的函数表达式中一次项系数“ k ”和常数项“ b ”的实际意义.

(4) 根据你家的实际情况, 选择哪种套餐较合算? 说明理由.

议一议

(1) 所得的函数表达式中的“ k ”“ b ”分别对每月资费有怎样的影响?

(2) 一般地, 什么情况下选择 A 套餐? 说说你的理由. 什么情况下选择 B 套餐呢? C 套餐呢?

做一做

在手机资费问题中, 通话时间直接影响着资费的多少, 而且在其他时间固定的情况下, 在一定时段内手机资费与通话时间成一次函数关系.

(1) 与上述“手机资费”问题类似的, 你还能找出哪些变量之间的关系, 可以用一次函数来近似地表述? 为什么?

(2) 一次函数由两个系数“ k ”“ b ”确定. 在你所举的具体背景中, “ k ”“ b ”的具体意义是什么? 具体背景中哪些因素可以导致“ k ”“ b ”的变化?

以小组为单位, 探究上述问题, 写出有关实践活动的报告, 并进行班级交流.

习题

以小组为单位, 调查“手机资费”的套餐种类, 探索选择哪种套餐较为合算, 把你的分析过程和最终结论总结成一份课题报告, 并进行班级交流.

对于问题“你家这部手机的使用情况，将以本地通话为主，还是长途通话较多？”一些班级实际调查发现下面一些情况：①大多数学生调查的结果是，手机的使用以本地通话为主，故忽略长途主叫情况进行研究；②个别学生的调查结果是，手机的使用以长途通话为主；③还有学生的调查结果是，各个月份本地通话时间和长途通话时间相差不多，即本地通话费基本稳定，长途通话费也基本稳定，由此关注到月平均通话时间及平均费用的使用。此外，在这个问题中学生都会发现有两个变量，有的学生还会考虑到短信对总资费的影响。

教师对学生提出的用法逐一点评，并围绕与“每月资费”相对应的自变量分析。课堂容量毕竟有限，具体的学情也会有不小的差异，学生收集整理的情况可能有预设情况中的一种或几种，教师不必全部涉猎，根据教学实际中学生发展的可能情况，围绕教学目标，抓住一两种研究透彻即可。

本环节进一步帮助同学们感受现实问题数学化的进程，感受函数作为一种数学模型在分析实际问题中的重要作用。对于学习程度较好的同学，完全可以放手让他们自行设计解决问题的方法：包括对数据的分析、处理形式、数学模型的选取与应用等；对于被动等待型的学生要多进行单独的师生交流——“对这个问题你怎么看？”“还可能做出什么？”在师生平等的讨论中激起学生思考，从问题提出和问题解决的过程中获得个性化的成功体验。

可能出现情况①：可设本地通话时间为 x 分钟，通话费用为 y 元，则

$$y_A = 0.2x + 10 \quad (x \geq 200) ;$$

$$y_B = 0.18x \quad (x \geq 389) ;$$

$$y_C = 0.15x + 6 \quad (x \geq 440) .$$

k 为本地主叫每分钟的费用， b 为没有本地通话时的费用。

学生在确定自变量的取值范围时可能会遇到困难，教师要提示学生关注每一套餐中的备注。

可能出现情况②：手机的使用以长途通话为主，对每月本地通话费用取平均值代入；如果我们设本地通话平均费用为 m 元（ m 是我们假设的一个常量），长途通话时间为 x 分钟，总通话费用为 y 元，则

$$y_A = 0.28x + 10 + m \quad (m \geq 40) ;$$

$$y_B = 0.3x + m \quad (m \geq 60, x \geq 34) ;$$

$$y_C = 0.3x + 6 + m \quad (x \geq \frac{66-m}{0.3}) .$$

k 表示长途通话每分钟的费用， b 表示长途通话为0时的总话费。

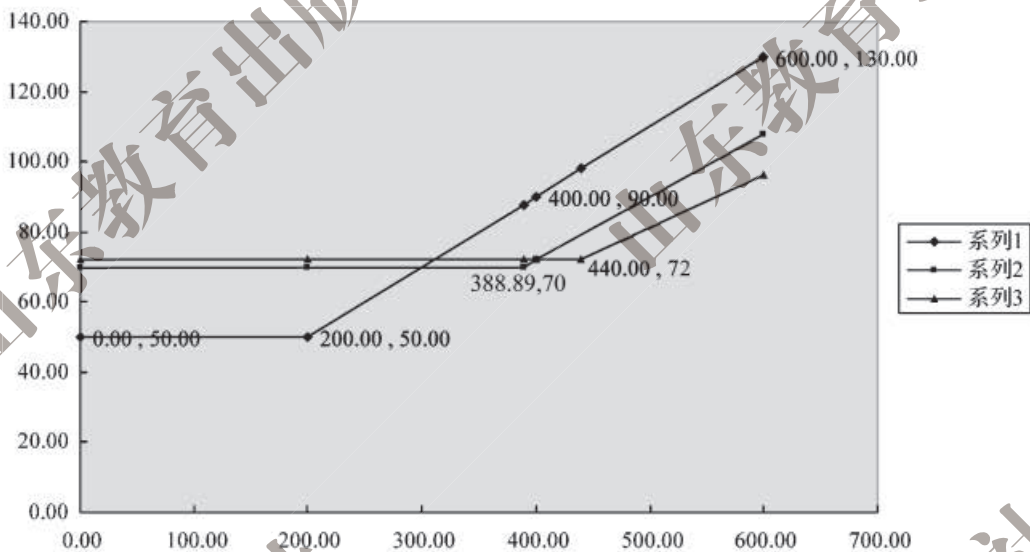
学生不一定会想到把本地通话费用取平均值代人，受①的影响，学生很可能会想到忽略本地主叫情况，这时需要教师对学生进行恰当的引导：任何人在使用手机时都会有一定量的本地通话，故逐渐想到②这种情况。

议一议

鼓励学生结合所得到的函数图象,从数和形两方面加深对一次函数的认知.

结合各自的生活经验发表个性化观点;建议指导学生对本课的研究过程进行反思、总结,初步概括数学建模的一般方法.以小组为单位制作课题报告,课题报告含以下几方面内容:现实问题 $\rightarrow$ 数据处理与分析 $\rightarrow$ 发现数学关系 $\rightarrow$ 数学建模 $\rightarrow$ 求解数学模型并评估解的合理性 $\rightarrow$ 拓展应用.

下面是某学生的结果:



根据图象,

当 $x \leq 300$ 时, 选择套餐 A 最划算;

当 $300 < x \leq 400$ 时, 选择套餐 B 最划算;

当 $x > 400$ 时, 选择套餐 C 最划算.

做一做

引导学生寻找更多的背景从中感知生活中一次函数模型的应用以及根据函数表达式自行构造适合的应用情境,以更好地实现由意义理解到自主建构的飞跃,提高学生的应用意识.

仅从表达式看,一次函数由两部分组成,一部分是常数项 b ,这个量是不变的量,与自变量没关系;另一部分是一次项 kx ,它和自变量成正比;引导学生解释具体背景中,“ k ”“ b ”所代表的含义,并结合学习体验加以分析、研究、决策,第2个问题可以使学生对一次函数模型的理解做到更深入细致.

习题

略.

第八章 平行线的有关证明

一、《标准》要求

1. 体会通过合情推理探索数学结论，运用演绎推理加以证明的过程，在多种形式的数学活动中，发展合情推理与演绎推理的能力.
2. 通过具体实例，了解定义、命题、定理、推论的意义.
3. 结合具体实例，会区分命题的条件和结论.
4. 知道证明的意义和证明的必要性，知道证明要合乎逻辑，知道证明的过程可以有不同的表达形式，会综合法证明的格式.
5. 了解反例的作用，知道利用反例可以判断一个命题是错误的.
6. 掌握基本的证明方法. 掌握对顶角相等、同角（等角）的余角相等、同角（等角）的补角相等的性质.
7. 掌握基本事实：两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行.
8. 掌握平行线的性质定理：两条平行线被第三条直线所截，同位角相等. *了解平行线性质定理的证明.
9. 证明平行线的判定定理：两条直线被第三条直线所截，如果内错角相等（或同旁内角互补），那么这两条直线平行；探索并证明平行线的性质定理：两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等（或同旁内角互补）.
10. 了解平行于同一条直线的两条直线平行.

二、教学目标

1. 理解证明的必要性和设置基本事实的必要性，体会推理的严谨性和结论的确定性，初步树立步步有据的推理意识，发展推理能力.
2. 通过具体例子了解定义、命题、定理的含义，会区分命题的条件和结论.
3. 结合具体实例，能通过反例判断一个假命题.
4. 初步体会公理化思想，并了解本套教科书所采用的基本事实；阅读有关《原本》和公理化的史实，感受公理化方法对数学发展和促进人类文明进步的价值.
5. 经历对顶角定理、两直线平行的有关判定定理、两直线平行的有关性质定理、三角形内角和定理及其推论等定理的证明过程，初步掌握综合法证明的格式；能利用这些定理解决简单的问题.

三、设计思路

《标准》在“图形的性质”中，比较多地使用了“探索并证明”的表述，也就是要在一定的情境中，引导学生借助已有的知识和经验，借助图形的直观，通过操作、试验，运用合情推理或图形运动等方法，探索发现图形可能具有的性质，这与单纯的给出

“已知、求证、证明”的方式研究图形性质是有区别的. 两者相比, 前者更加有利于学生在获取有关知识的过程中, 不断提高研究几何图形性质的能力, 发展创新意识和创新能力. 为了实现《标准》的这一意图, 本套教科书选择了从“两阶段”(探索阶段与证明阶段)过渡到合二为一(边探索边证明)的处理方式. 对“相交线与平行线”和“三角形”的学习采取了分两个阶段学习的方式; 对于“平行四边形”“特殊平行四边形”等, 采取探索加证明的方式, 也就是引导学生通过观察、测量、操作、实验等活动探究结论, 同时对这些探究的结论进行严格的推理论证. 这样的处理方式, 初始阶段, 通过观察、测量、操作、实验等探索活动, 发现有关结论; 在这样的活动过程中, 学生通过亲身探究活动, 展开合情推理, 合情推理能力和探究发现能力得到很好的发展, 主体性也得到了充分的发挥; 由于初始阶段, 重心放在结论的探究上, 几何学习的语言表述等难点得以分解, 有利于降低几何入门教学的难度, 激发学生的学习兴趣.

本章是证明的起始阶段, 学生先前已经通过观察、测量、实验、操作等活动探究得到了一些几何结论, 学生也尝试进行了一些验证和说理, 基本认可这些结论, 但毕竟不是证明. 本章首先要让学生明确认识到, 这些探究的结论需要加以证明; 然后明确证明需要一个话语体系, 为此就有了所谓的定义、命题等; 其次, 证明需要确定一些出发点, 为此, 需要梳理有关结论, 选择某些结论作为证明的出发点(实际上这就是构建局部的公理体系); 有了这些证明的出发点, 下面自然就应依次证明一些先前探究得到的定理, 在证明过程中, 初步掌握证明的要求和格式, 再次认识到证明的严谨性, 做到步步有据, 发展学生的推理能力. 基于这样的考虑, 就有了下面几节内容:

第1节指出定义、命题的含义, 为后面的基本事实、定理奠定基础.

第2节说明“要判断一个数学命题是否正确, 仅仅依靠实验、观察或归纳是不够的, 必须一步一步、有根有据地进行推理”, 强调证明的必要性.

第3节指出基本事实、定理的含义, 考虑到学生的年龄特点, 这里沿用了以往扩大公理体系的做法, 为后面的证明奠定基础. 同时, 介绍了欧几里得的《原本》.

第4节给出了平行线的判定的基本事实和定理.

第5节给出了平行线的性质定理. 对于“判定”和“性质”, 只要求学生遇到具体情况会用就可以了.

第6节对三角形内角和定理及内角与外角的关系进行了证明. 需要强调的是, 过去只是通过直观或撕纸等具体操作认识了这一定理, 而这里则给出了严格证明. 同时, 第一次在平面几何中安排了不等关系的处理和证明.

本章是证明的起始阶段, 因此, 比较关注对证明意义的理解和对证明过程中格式规范的要求. 因此, 本章的证明题都要求画出相应的图形, 写出具体的已知、求证, 并且在证明过程中要求注明证明的依据. 这样做的目的是, 希望养成学生步步有据的习惯, 形成严谨的科学态度. 当然, 在后面几个章节, 学生逐步养成步步有据的习惯之后, 也可以不再做这样的要求.

本章多数结论是前面已经探究过的, 当然也有部分新的结论. 对于已经探究过的结

论,学习的重心自然是这些结论的证明,但对于这些内容,教科书也不是直接呈现证明,往往是先引领学生回顾有关结论的发现过程,希望通过回顾发现过程,引发证明的思路.对于新的结论,教科书多是先引领学生通过活动发现结论,进而利用前面的定理进行证明.总之,教科书设计中,除了关注学生证明过程外,也关注证明思路的发现过程和结论的发现过程.

需要说明的是:

“两直线平行,同位角相等”并不是基本事实,因此要求给予证明.但这个证明相对比较复杂,采用了反证法,因此,按照《标准》的要求,教科书将其作为选学内容.同样,反证法,虽然是《标准》中要求了解的内容,但本章学习中仅有这个选学内容涉及反证法,因此,建议本章不要单独讨论反证法,根据本套教科书的整体设计,反证法将在后面进行专门研究.

公理化体系的证明重要依据之一是公理,由于知识的局限和认知程度的影响,本套教科书没有使用欧氏几何体系中的公理,而是根据《标准》选择了九条基本事实作为公认的事实,不加以证明,直接做为证明的依据,称之为基本事实.

四、课时安排建议

1 定义与命题	2 课时
2 证明的必要性	1 课时
3 基本事实与定理	1 课时
4 平行线的判定定理	1 课时
5 平行线的性质定理	1 课时
6 三角形内角和定理	3 课时
回顾与思考	2 课时

五、教学建议

1. 关注对证明必要性的理解和证明意识的建立.

要让学生知道数学需要证明,数学之外的其他事物,也应该追究其缘由、问个为什么;体会公理化方法在数学和人类文明中的作用.证明的必要性,不仅要从几何的角度给予认识,还要从代数甚至其他学科、实际生活等角度加以认识.让学生认识到,说话办事要有根有据.对于猜测、实验、操作等得到的结论一定要给予证明.

2. 兼顾探索与证明,发展学生推理能力.

推理能力的发展应贯穿于整个数学学习过程中,本节开始将着重提高学生的演绎推理能力,但并不意味着不要关注合情推理.在解决问题的过程中,两种推理的功能不同,相辅相成;合情推理用于探索思路,发现结论;演绎推理用于证明结论.教学中要关注这两种能力的发展.因此,在关注证明的同时,也应尽可能创设探究活动、实践操作活动,在活动中发展学生的探究能力.

本章所涉及的许多结论都是学生所熟悉的,教学时不能只是简单地证明过去所发现的结论,致使学生产生厌烦情绪.课堂上可以选择其中部分结论作为示范加以证明,其他结论可以让学生自己证明.对于本章中新的知识,要引导学生先进行探索,从探索的过程中找到证明的思路和过程.对学生学习中出现的多思路和方法,应该予以充分肯定,并在全体同学中交流和展示,使其个性得以张扬和健康发展.

3. 关注证明的依据和规范性.

由于本章的多数结论学生先前已经探究过,因此,在证明过程中难免出现一些循环论证的现象.教学中要注意引导学生区分哪些结论可以作为证明的依据,哪些结论不可以作为证明的依据.提醒学生,只要作为证明出发点的基本事实和前面已经证明过的结论才能作为证明的依据.当然,循环论证,也只是本章学习过程中的一个阶段性现象,在下面三角形证明学习完之后,所有前面已经得到的结论都可以作为证明的依据,到九年级几何学习结束后,全套书中所有的黑体字的结论都可以作为证明的依据,这样的现象就可避免了.因此,学生出现了循环论证的情况,加以引导即可,也不用过于担心,更不要给学生过大的压力,避免因压力过大造成学生兴趣的流失.

由于学生是第一次学习证明,老师要借助规范的板书进行示范,力求做到步步有据.但也正由于学生是第一次学习证明,学生的证明不规范的现象也难免,因此,教师要允许学生少有时滞,不要期盼一次到位.

4. 准确定位教学要求,注意控制题目难度.

由于本章是证明的起始阶段,重点是理解证明的必要性、初步掌握综合法证明的步骤和格式,因此,教材中有关结论的证明过程都不复杂,选取的例题和习题都不难,教学中注意控制难度,不宜补充难度过高、推理步骤过多的题目.

六、评价建议

1. 关注个体差异,实施激励性评价.

评价的目的是为了学生的发展.评价应该作为把水从低处提到高处的“水泵”,而并非只是甄别优劣的“筛子”.因此,评价的标准不能唯一,评价要关注学生的个体差异,实施激励性评价.如,有的学生可能很快就学会了规范的证明格式,但可能有部分学生的表达不甚规范,应允许学生有这样的差异,应通过激励性的评价,促进后进的学生尽快达成目标.对于学有余力的学生,可以适当提高要求,通过提高要求促进这部分学生更好的发展,如可以要求这部分学生尝试进行一题多解、一题多变的训练.

2. 关注评价主体,实施多元评价.

学生是学习的主体,实际上也是评价的主体.因此,可以发挥学生在评价过程中的主体性.如对于具体命题的证明、作业的批改,可以采用互评的方式.在互评和相互解释、相互讲解中,在证明思路的发现、证明格式的规范、语言表达的简洁等方面,促进学生之间的共同提高.

3. 关注活动过程，加强过程性评价.

本章设计了很多活动，因此应加强对学生活动过程的评价. 注重考查学生证明意识的建立和运用过程，考查他们是否积极地独立思考、积极地参与合作，能否顺利地获取解决问题的思路、解决问题过程中能否主动寻求多样的方法、解决问题之后是否具有反思的习惯和能力.

4. 关注对结论的理解水平和应用能力的评价.

对于具体结论的评价，应该注意把握实质，避免形式的记忆和条文的背诵，而应考查学生是否正确理解了这个结论的条件、结论、使用范围，能否运用这个结论解决简单的问题等.

第一段文字意在引起学生思考：观察、度量、猜测得到的结果未必正确，从而认识证明的必要性。

大树的喻义是：数学犹如一株根深叶茂、生生不息的大树。具体到本章，意在引导学生认识定义和公理处于大树的根部，是证明的基础；定理、推论等在大树的上部，是由定义、公理派生出来的。

第八章 平行线的有关证明

通过观察、度量、猜测得到的结论都是正确的吗？如果不是，那么用什么方法说明一个结论的正确性呢？

根据“同位角相等，两直线平行”“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”，你还能得到哪些熟悉的结论？你能肯定它们都是正确的吗？

本章我们将一起学习如何根据一些基本事实推出其他结论的过程，并将对三角形的内角和进行研究。同时，我们还将探讨三角形的内角与外角的关系。

推论

推论

定理

学习目标

- 知道通过探索得到的结论不一定正确
- 知道证明要有出发点，要步步有据
- 会证明平行线和三角形的有关结论

定义

公理

1 定义与命题

图 8-1 中给出了五个三角形, 你能指出哪个是等腰三角形吗? 你的根据是什么? 与同伴进行交流.^[1]



图 8-1

“有两条边相等的三角形叫做等腰三角形.”这一简短的语句既说明了等腰三角形是三角形的一类, 又指出了等腰三角形区别于其他三角形的本质特征. 我们把它叫做等腰三角形的定义.

一般地, 用来说明一个名词或者一个术语的意义的语句叫做定义 (definition).

议一议

你在数学课上学过哪些定义? 你能说明定义有哪些作用吗? 与同伴进行交流.

定义实际上就是一种规定. 例如, “大于直角而小于平角的角叫做钝角.”这个定义规定了凡是大于直角而小于平角的角都是钝角, 反过来, 凡是钝角都大于直角而小于平角. 这个定义既可以作为钝角的一种判定方法——凡是大于直角而小于平角的角都可“判定”为钝角, 又可以作为钝角的性质——钝角都大于直角而小于平角.

过去我们还学习过数、式和图形的一些性质. 例如,^[2]

(1) 如果 $a=b$, 那么 $a+c=b+c$;

议一议

让学生回忆一些概念的定义, 一方面复习了有关内容, 另一方面使学生初步了解给数学概念下定义的方法.

^[2] 这里以前面学过的内容为例, 说明什么是命题, 什么不是命题. 要求学生理解命题的含义.

对于命题的定义, 要抓住“判断”和“语句”这两点. 判断就是对思维对象有所肯定或有所否定的思维形式. 命题是表达判断的语句, 因此命题必须肯定一件事物是什么或者不是什么. 例如, “如果同位角相等, 那么两直线平行”是命题, “如果同位角不等, 那么两直线不平行”也是命题. 但并不是所有的语句都是命题, 如疑问句就不是命题. 要区分什么是命题, 什么不是命题, 可以结合教科书中的具体例子作些说明, 让学生了解就可以了, 不必深究.

教学目标:

1. 了解定义、命题的含义, 会区分命题的条件 (题设) 和结论, 会把命题改写成“如果 那么”的形式.

2. 了解真命题、假命题的含义, 能通过具体例子理解反例的作用, 知道利用反例可以说明 (证明) 一个命题是假命题.

3. 将一个命题分解为“条件”和“结论”两部分, 既是本节的重点, 也是难点.

^[1] 这个问题主要是引起学生注意: 在数学学习中我们会遇到许多概念, 假如不对这些概念下定义, 别人就无法理解这些概念, 以致无法进行正常的交流. 另外, 要进行严格的论证, 也必须首先对所涉及的概念下定义.

(2) 对顶角相等;

(3) 如果 a, b, c 是三角形的三条边的长, 并且 $a^2 + b^2 = c^2$, 那么这个三角形是直角三角形;

(4) 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线也互相平行.

上面给出的语句都是对某件事情进行判断的句子. 判断一件事情的句子, 叫做命题 (statement).

反之, 如果一个句子没有对某一件事情作出任何判断, 那么它就不是命题. 例如, 下列句子都不是命题:

(1) 平行用符号 “//” 表示;

(2) 作线段 $AB = CD$;

(3) $\angle A = 90^\circ$ 吗?

随堂练习

1. 略.

2. 略.

习题8.1

1. (1) 如果直线 $AB \perp$ 线段 CD , 并且 AB 交 CD 于点 E , 且 $CE = DE$, 那么直线 AB 就是线段 CD 的垂直平分线.

(2) 如果直线 AB 是线段 CD 的垂直平分线, 那么:

① $AB \perp CD$; ② AB 平分 CD .

2. (1) (2) (4) (6) 是命题.

随堂练习

1. 说出它们的定义:

(1) 角; (2) 角的平分线; (3) 数轴; (4) 一元一次方程.

2. 分别说出两个语句, 其中一个命题, 另一个不是命题.

习题 8.1

数学理解

1. 根据线段的垂直平分线的定义, 说一说:

(1) 线段的垂直平分线的一种判定方法;

(2) 线段的垂直平分线的两个性质.

2. 下列语句中, 哪些是命题?

(1) 三个角分别相等的两个三角形一定全等;

(2) 锐角都小于直角;

(3) 你的作业做完了吗?

(4) 所有的质数都是奇数;

(5) 过直线 l 外一点 P 作 l 的平行线;

(6) 如果明天是星期五, 那么后天是星期六.

议一议

观察下列命题：

- (A) 如果两个三角形的三条边分别相等，那么这两个三角形全等；
- (B) 如果 $a=b$ ，那么 $a^2=b^2$ ；
- (C) 如果一个三角形是等腰三角形，那么这个三角形的两个底角相等；
- (D) 如果两个三角形中有两边和一个角分别相等，那么这两个三角形全等；
- (E) 如果两个角是内错角，那么它们相等.
- (1) 你发现这些命题的结构有什么共同特征？与同伴进行交流.
- (2) 这些命题中，哪些命题是正确的？哪些命题是不正确的？

^[1] 命题通常由**条件** (condition) 和**结论** (conclusion) 两部分组成. 条件是已知的事项，结论是由已知事项推断出的事项. 一般地，命题都可以写成“如果……那么……”的形式，其中“如果”引出的部分是条件，“那么”引出的部分是结论.

^[2] 在上面的命题中，(A)，(B)，(C) 都是正确的. 正确的命题叫做**真命题** (true statement). 对于真命题来说，当条件成立时，结论一定成立. 命题(D) 和 (E) 都是不正确的. 不正确的命题叫做**假命题** (false statement). 对于假命题来说，当条件成立时，不能保证结论一定成立.

要判断一个命题是假命题，只要能够举出一个例子，使之具备命题的条件，而不具有命题的结论，就可以说明这一命题是假命题，这种例子通常称为**反例** (counter example).

想一想

你能举出一个反例，说明“相等的角是对顶角”是假命题吗？试试看.

^[3] 例 说出下列命题的条件和结论，指出它是真命题还是假命题：

- (1) 面积相等的两个三角形全等；

确即时，不必强调统一. 教学时，可结合已学过的命题对学生进行训练.

^[2] 因为判断有正确和错误两种，所以命题相应地有真命题和假命题之分. 学生已熟悉了很多真命题，但对假命题这一概念却是初次接触. 教学时，最好能结合真命题和假命题的例子对照讲解. 要强调说明真命题在条件具备时，结论无一例外地成立. 而假命题在条件具备时，结论却不能保证总是成立. 应告诉学生，数学中由于假命题的存在，所以对命题的证明就是十分必要的了.

^[3] 对于例题中判断真命题和假命题的方法，应让学生充分表达，进而引导学生体会：要说明一个命题是假命题，通常举出一个反例就可以了. 同时，与前面的内容相呼应：要说明一个命题是正确的，无论验证多少个特殊的例子，也无法保证命题的正确性.

议一议

这里给出的五个命题中，(A) (B) (C) 是真命题，(D) (E) 是假命题. 此处的教学重点是让学生抓住结构特征“如果……那么……”，进而概括得出：命题都是由条件和结论两部分组成的，条件就是已经知道的事项，结论就是由已经知道的事项推断出的事项. 教学时，应主要让学生通过对所给例子的学习，逐步感悟、体会命题的含义和结构，不要让学生机械记忆.

^[1] 在叙述命题时，除“如果……那么……”这种充分条件的假言判断形式外，还有省略连接词的简单判断形式. 要引导学生逐步熟悉命题叙述的这两种形式. 在区分一个简单判断的条件和结论时，学生可能会出现困难. 为此，要把简单判断正确地改写成“如果……那么……”的形式. 改写时，只要准

《《》》 随堂练习

1. (1) 如果同一平面内的两条直线垂直于同一直线, 那么这两条直线平行.
真命题.
- (2) 如果两个角是锐角, 那么它们的和是钝角.
假命题.
- (3) 两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行.
真命题.
- (4) 如果一个数是负数, 那么这个数小于0.
真命题.

2. (1) 假命题. 方程 $\frac{x-5}{2} = \frac{3-x}{3}$ 的解不是 $x=4$.

(2) 假命题. 边长为1的正方形和有一个角是 60° 的边长为1的菱形不全等.

(3) 假命题. 当 $a=b=1$ 时, $a^2+ab+b^2=3$, 而 $(a+b)^2=4$.

(2) 同角的补角相等;

(3) 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等.

解: (1) 先把这个命题写成“如果……那么……”的形式: 如果两个三角形的面积相等, 那么这两个三角形全等.

条件: 两个三角形的面积相等;

结论: 这两个三角形全等.

它是假命题.

(2) 原命题可以写成: 如果两个角是同一个角的补角, 那么这两个角相等.

条件: 两个角是同一个角的补角;

结论: 这两个角相等.

它是真命题.

(3) 原命题可以写成: 如果两个三角形有两角分别相等且其中一组等角的对边相等, 那么这两个三角形全等.

条件: 两个三角形有两角分别相等且其中一组等角的对边相等;

结论: 这两个三角形全等.

它是真命题.

《《》》 随堂练习

1. 将下列命题写成“如果……那么……”的形式, 分别说出它的条件和结论, 并指出它是真命题还是假命题:
- (1) 在同一平面内, 垂直于同一直线的两条直线平行;
- (2) 两个锐角的和是钝角;
- (3) 同旁内角互补, 两直线平行;
- (4) 负数小于0.
2. 下列命题中哪些是假命题? 为什么?
- (1) 如果 $\frac{x-5}{2} = \frac{3-x}{3}$, 那么 $x=4$;
- (2) 各边分别相等的两个多边形一定全等;
- (3) 如果 $a \neq 0$, $b \neq 0$, 那么 $a^2+ab+b^2=(a+b)^2$.

习题 8.2

数学理解

1. 分别指出下列命题的条件和结论, 并指出它是真命题还是假命题:

- (1) 如果两个三角形的两边及其夹角分别相等, 那么这两个三角形全等;
- (2) 直角三角形的两个锐角互余;
- (3) 两直线平行, 同位角相等.

2. 指出下列命题是真命题还是假命题. 如果是假命题, 举出一个反例.

- (1) 如果 a 为实数, 那么 $|a| > 0$;
- (2) 一个三角形中至少有两个锐角;
- (3) 如果 $\angle\alpha$ 与 $\angle\beta$ 互余, $\angle\beta$ 与 $\angle\gamma$ 互余, 那么 $\angle\alpha$ 与 $\angle\gamma$ 也互余.

2 证明的必要性

小明任意画了几个三角形, 用量角器分别测量各三角形内角的度数, 然后把三个角度加起来, 发现每个三角形的内角的和都是 180° . 于是他就得出了一般性的结论: 三角形三个内角的和等于 180° .

小颖对小明的做法提出了异议: 你怎么知道你的结论一定可靠呢? 三角形有无数多个, 你才测量了几个三角形? 即使测量几千个、几万个, 也只是很小的一部分, 怎么能从这很小一部分的性质推出所有三角形的性质呢? 再说, 你的测量不可能没有误差, 你怎么能确定三角形的内角和正好是 180° , 而不是 181° 或 179° 呢?

在数学学习中, 我们可以通过实验、归纳、观察、猜测等方法, 得到数学命题. 你是否想过, 通过这些方法得到的命题一定是真命题吗?

教学目标:

1. 经历观察、验证、归纳等过程, 使学生对由这些方法所得到的结论产生怀疑, 以此激发学生的好奇心理, 从而认识证明的必要性, 培养学生的推理意识.
2. 体会检验数学结论的常用方法: 实验验证、举出反例、推理等.

在以前的学习中, 学生通过探索 (观察、测量、实验、归纳) 已经得到了很多正确的结论, 但并没有进行严格的证明 (虽然学生对它们的正确性也是认可的, 并且利用这些结论解决了一些简单的问题), 因而容易给学生造成一些错觉, 认为通过探究得到的结论都是正确的. 本课时开始就是要学生审视这一点, 让学生认识到探究得到的结论未必可靠, 就是可靠的, 也需要进行严格的推理论证. 为了达成这一目的, 教科书首先安排了一个活动, 主要让学生通过度量得出猜想, 但度量既有误差, 又有局限性, 因此由度量所得到的结论便值得怀疑.

习题 8.2

1. (1) 条件: 两个三角形的两边及其夹角分别相等.
结论: 这两个三角形全等.

真命题.

- (2) 条件: 两个角是一个直角三角形的两个锐角.

结论: 这两个角互余.

真命题.

- (3) 条件: 两直线平行.

结论: 同位角相等.

真命题.

2. (1) 假命题. 例如: 当 $a = 0$ 时, $|a| = 0$.

- (2) 真命题.

- (3) 假命题. 例如: $\angle\alpha = 30^\circ$, $\angle\beta = 60^\circ$, $\angle\gamma = 30^\circ$, 满足 $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$, $\angle\beta + \angle\gamma = 90^\circ$, 但 $\angle\alpha + \angle\gamma = 60^\circ \neq 90^\circ$.

做一做

教科书再给出几个例子，让学生进行猜想、验证，目的是让学生对观察与归纳所得到的结论产生怀疑，进而思考：怎样才能断定一个数学结论是正确的呢？

对于问题（1）， $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 时， $n^2 - n + 11$ 的值分别为 11, 11, 13, 17, 23, 31, 41, 53, 67, 83, 101，全是质数，而 $n = 11$ 时， $n^2 - n + 11$ 的值为 $121 = 11^2$ 。

对于问题（2），当一个整数为 1 或负数时，这个数等于或小于它的倒数。

对于问题（3），小明的说法是正确的。

^[1] 由上述内容促进学生深刻理解“要判断一个数学结论是否正确，仅仅依靠经验、观察或实验是不够的，必须一步一步、有根有据地进行推理”的含义。

随堂练习

1. 这四个图形都容易给人一些视觉上的错觉。教学中，应首先鼓励学生说出自己的感觉，再实际测量一下，确认或否定自身的真实感觉。

- （1）可能有学生感觉图中两条线段长度不等，但实际测量可以发现它们是相等的。
- （2）可能有学生感觉线段 a 与线段 d 在同一直线上，而实际上，线段 b 与线段 d 在同一直线上。
- （3）可能有学生感觉两条线段不一样长，而实际上，两条线段一样长。
- （4）可能有学生感觉图中的四边形向里凹，但通过直尺比较，四边形的四条边是直的，并且长度是相等的，是正方形。

做一做

（1）当 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 时，代数式 $n^2 - n + 11$ 的值是质数还是合数？小明由此得出一个命题：对于所有自然数 n ， $n^2 - n + 11$ 的值都是质数。你认为小明得出的命题是真命题吗？为什么？与同伴进行交流。

（2）小刚发现 $2 > \frac{1}{2}$, $3 > \frac{1}{3}$, $4 > \frac{1}{4}$, $\dots$ ，由此得出一个命题：任何一个整数都大于它的倒数。你认为小刚得出的命题正确吗？为什么？与同伴进行交流。

（3）小颖在一张纸上画出一条直线，这条直线把纸面分为 2 部分；她在纸上又画出一条直线，发现这两条直线最多可以把纸面分为 4 部分。于是她猜想：“三条直线最多可以把一个平面分为 6 部分。”小明则认为：“三条直线最多可以把一个平面分为 7 部分。”你认为谁的说法是正确的？为什么？与同伴进行交流。

要判断一个命题是不是真命题，仅仅依靠经验、观察、实验和猜想是不够的，必须一步一步、有根有据地进行推理。推理的过程就是证明（proof）。^[1]

议一议

- （1）在数学学习中，你用到过推理吗？举例说明。
- （2）在日常生活中，你用到过推理吗？举例说明。

随堂练习

1. （1）图（1）中两条线段 a 与 b 的长度相等吗？请你先观察，再度量一下。



（第1题）

(2) 图(2)中三条线段 a, b, c , 哪一条和线段 d 在同一条直线上? 请你先观察, 再用直尺验证一下.

(3) 图(3)中两条线段 a 与 b 的长度相等吗?

(4) 图(4)中的四边形是正方形吗?

2. 小明在计算 $(a+b)^2$ 时, 以为 $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, 发现不对, 后来学习了 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 后, 他又猜想: $(a+b)^3 = a^3 + 3ab + b^3$. 小明的猜想正确吗?

3. 当 n 为正整数时, $n^2 + 3n + 1$ 的值一定是质数吗?

读一读

费马的失误

历史上, 很多数学家都想找到求质数的公式. 1640 年, 数学家费马 (Pierre de Fermat, 1601—1665) 验证了当 $n=0, 1, 2, 3, 4$ 时, 式子

$$2^{2^n} + 1$$

的值 3, 5, 17, 257, 65537 都是质数, 于是他高兴地断言:

“对于所有的自然数 n , $2^{2^n} + 1$ 的值都是质数.” 由于费马在数学界的崇高威望, 以及验证这类数字是否为质数的艰巨性, 因此在很长一段时间里没有人怀疑这一结论的正确性, 并且把这类数称为费马数.

1732 年, 数学家欧拉 (Euler, 1707—1783) 指出, 当 $n=5$ 时, $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$, 从而否定了费马的结论. 更有意思的是, 从第 6 个费马数开始, 数学家们在费马数中再也没有发现一个新的质数, 全都是合数. 有人甚至给出一个新的猜想: 当 $n \geq 5$ 时, 费马数全都是合数!



费马

习题 8.3

数学理解

1. 七(1)班有 39 位同学, 他们每人将自己的学号作为 n 的取值 ($n=1, 2, 3, \dots, 39$) 代入式子 $n^2 + n + 41$, 结果发现式子 $n^2 + n + 41$ 的值都是质数, 于是他

2. 不正确. 因为 $(a+b)^3$

$$= (a+b)^2 (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) (a+b)$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

3. 不一定. 当 $n=6$ 时,

$$n^2 + 3n + 1 = 55 = 5 \times 11.$$

读一读

此阅读材料力图使学生认识到, 仅由几个特殊情况归纳出来的结论并不可靠, 即使如费马这样的名家, 归纳的结论也难免错误!

习题 8.3

1. 这个猜想不正确, 当 $n=40$ 时, 式子 $n^2 + n + 41$ 的值为 $40^2 + 40 + 41 = 41^2$, 是一个合数.

2. 可以得到结论：所有奇数都可以表示为两个相邻自然数的平方差；但对于偶数，则不一定能表示成两个自然数的平方差，例如，10 就不能写成两个自然数的平方差。
3. 如图， $\angle ABC = \angle DEF$ 一般地，如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补. 可以利用平行线的特点加以解释.

教学目标：

1. 了解基本事实、定理的含义，初步体会公理化思想，并了解本套教科书所采用的基本事实.
2. 通过介绍欧几里得的《原本》，使学生感受公理化方法对数学发展和促进人类文明进步的价值.

开门见山，直接进入主题“如何证明一个命题是真命题”，教学中，可以组织学生就这一话题进行研讨，在研讨的基础上，让学生阅读教材中有关欧几里得《原本》以及公理化思想的介绍，促进学生了解公理、证明、定理等概念.

欧几里得的《原本》中，公理与公设是有区别的. 一般认为，《原本》中的公设所阐述的内容是几何图形特有的，像“如果两条直线与另一条直线相交，所成的同侧内角的和小于两直角，那么这两条直线在这一侧必相交”（这就是著名的第五公设）；而公理所阐述的内容是通用的，如“等量加等量其和相等”. 在近现代几何学中不再用“公设”这一术语了，统称为“公理”. 作为教师，可以了解这一点，但不要向学生介绍.

们猜想：“对于所有的自然数，式子 n^2+n+41 的值都是质数.”

你认为这个猜想正确吗？验证一下 $n=40$ 的情形.

2. 观察下列各式：

$$1=1^2-0^2,$$

$$3=2^2-1^2,$$

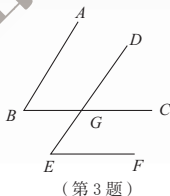
$$5=3^2-2^2,$$

$$7=4^2-3^2,$$

...

你能否得到结论：对于所有奇数，都可以表示为两个自然数的平方差？对于偶数，也能表示为两个自然数的平方差吗？与同伴进行交流.

3. 如图， $AB \parallel DE$ ， $BC \parallel EF$ ，那么你能判断 $\angle ABC$ 与 $\angle DEF$ 的大小关系吗？小颖据此得出结论：如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等. 你认为她的想法正确吗？与同伴进行交流.



3 基本事实与定理

如何通过推理的方法证实一个命题是真命题呢？

在数学发展史上，数学家们也遇到过类似的问题. 公元前 3 世纪，古希腊数学家欧几里得（Euclid，约前 330—约前 275）编写了《原本》（Elements）一书，将前人积累下来的丰富的几何学成果整理在系统的逻辑体系之中. 他挑选了一部分数学名词和一部分公认的真命题作为证实其他命题的出发点和依据，定义出其他有关的概念，并运用推理的方法，证实了数百个有关的命题，使几何学成为一门具有公理化体系的科学.



欧几里得

通过长期实践总结出来,并且被人们公认的真命题叫做公理^①(axiom).除了公理外,其他真命题的正确性都通过推理的方法证实.经过证明的真命题叫做定理(theorem).

本教科书选用九条基本事实作为证明的出发点和依据,我们已经认识了其中的八条,它们是:

1. 两点确定一条直线.
2. 两点之间线段最短.
3. 同一平面内,过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.
4. 两条直线被第三条直线所截,如果同位角相等,那么这两条直线平行.
5. 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行.
6. 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等.
7. 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等.
8. 三边分别相等的两个三角形全等.

另外一条基本事实我们将在后面的学习中认识它.

在证明命题时,等式的有关性质和后面将要学习的不等式的有关性质都可以作为推理的依据.例如,“在等式或不等式中,一个量可以用它的等量来代替”,简称为“等量代换”.^[1]

利用上面这些证明的出发点,我们就可以证明已经探索过的结论了.

例 已知: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$.

求证: $\angle 3 = \angle 4$.

证明: $\because \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (已知),
 $\therefore \angle 3 = 180^\circ - \angle 1$, $\angle 4 = 180^\circ - \angle 2$ (等式的基本性质).
 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$ (等式的基本性质).

① 公认的真命题称为公理.《原本》中有“公理”与“公设”之分,近代数学对此不再区分,都称“公理”.

② 符号“ $\because$ ”读作“因为”,“ $\therefore$ ”读作“所以”.

例

教科书中第一次严格地证明几何定理,因此这里以例题的形式呈现,以让学生初步体会证明的思路与书写的过程.

^[1]实际上,这八条基本事实在前面学习中都详细探索过了,学生对它们的正确性是确信的.现在直接承认这八条基本事实,并以它们作为证明的出发点即可,不必讨论这些命题的正确性.

需要说明的是,作为数学教学内容的基本事实与作为数学科学的公理是有区别的.数学科学要求它的公理具备独立性、完备性、和谐性,而数学教学内容中的基本事实不需要完全具备这些特征.《标准》提出的这八条基本事实,有的在数学科学中就不是公理,而是可以证明的定理,但考虑到这些结论很明显,学生证明的难度还比较大,为了减轻学生学习的负担,在不影响学科结构的基础上,将这些定理也作为公理看待.对此,教师应心中有数,但不必向学生讲解.

通过例题,我们得到了定理:

定理 同角(等角)的补角相等^[1]

证明一个命题的正确性,要按“已知”“求证”“证明”的顺序和格式写出.其中“已知”是命题的条件,“求证”是命题的结论,而“证明”则是从条件(已知)出发,根据已给出的定义、基本事实和已经证明的定理,经过一步一步的推理,最后证实结论(求证)的过程.

随堂练习

1. 你认为基本事实和定理有哪些相同点和不同点?
2. 证明: 同角(等角)的余角相等.^{①[2]}

读一读

《原本》与《几何原本》

几何学(Geometry)是数学中最古老的分支之一.公元前3世纪,古希腊数学家欧几里得在前人积累的大量成果的基础上,搜集了当时所知道的几何事实,选择出他认为学生应该学习的内容,然后按照逻辑要求(逻辑要求,就是指一方面要有“定义、公理、定理”的形式,另一方面定理要写出“证明”,而“证明”所需的定义、公理和其他定理,都必须编写在这个定理的前面,也就是通常所说的“前因后果”的次序),整理成一部具有公理化体系的数学巨著《原本》.《原本》是用逻辑推理建立起演绎体系的最早典范.

1582年,意大利人利玛窦到我国传教,带来了15卷本的《原本》.1600年,明代数学家徐光启(1562—1633)与利玛窦相识后,便经常来往.1607年,他们把该书的前6卷平面几何部分合译成中文,并定名为《几何原本》.后9卷是1857年由我国清代数学家李善兰(1811—1882)和英国人伟烈亚历译完的.

《原本》是至今流传最广、影响最大的一部世界数学名著,它对数学及其他科

① 本教科书在随堂练习、习题中用黑体字给出的结论也可以作为今后证明的依据.

^[1] 由于基本事实和定理的数量不能太多,从而真命题不一定都作为基本事实或定理提出.例如,“垂直于同一条直线的两条直线平行”是真命题,但不作为基本事实,也不作为定理.不作为基本事实或定理的真命题不能作为证明命题的根据.至于假命题,肯定不是基本事实或定理.以上几点,都应向学生讲清.

^[2] 下一课时将开始证明有关平行线的定理,为此,这一课时将完成《标准》中要求的、在平行线之前的、证明平行线需要用到的一些简单定理.在课堂上——证明这些定理,可能显得较为枯燥,另外时间也不允许,因此,部分定理的证明,放到课后的习题中.但考虑到整套书的统一,以及便于学生将来的使用,本套书将这些定理都在正文中罗列出来.为此,这里明确提出这些定理可以证明,教学中根据实际情况,确定在课堂上还是课后完成这些定理的证明.

随堂练习

1. 基本事实和定理的共同点是:第一,它们都是真命题;第二,它们都可以作为证明的依据.它们的不同点是:基本事实(作为公理看待)的真实性是通过实践证实的,而定理的真实性必须通过推理证明.
2. 已知: $\angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$, $\angle\alpha + \angle\gamma = 90^\circ$, 求证: $\angle\beta = \angle\gamma$.
证明: $\because \angle\alpha + \angle\beta = 90^\circ$, $\angle\alpha + \angle\gamma = 90^\circ$ (已知),
 $\therefore \angle\beta = 90^\circ - \angle\alpha$, $\angle\gamma = 90^\circ - \angle\alpha$ (等式的性质).
 $\therefore \angle\beta = \angle\gamma$ (等量代换).

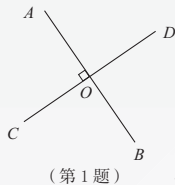
学乃至人类的思想所产生的巨大推动作用比其他著作无法取代的. 1687年牛顿在撰写《自然哲学的数学原理》时就曾受到过《原本》的启迪. 有人说, 进化论乃至美国的独立宣言, 都深受欧几里得方法的影响. 甚至于, 几百年前有的哲学家在自己的著作中也曾设法引用从定义、公理导出定理的形式进行论证.

欧几里得的《原本》为人们提供了一种研究问题的方法(称为公理化方法), 标志着人类思维的一场革命, 是科学思想史上的一个里程碑.

习题 8.4

知识技能

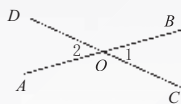
1. 已知: 如图, 直线 AB 和 CD 相交于点 O , 且 $\angle AOC$ 是直角.
求证: $\angle COB$, $\angle BOD$, $\angle DOA$ 都是直角.



(第1题)

数学理解

2. 证明: 对顶角相等.
已知: 如图, 直线 AB , CD 相交于点 O , $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角.
求证: $\angle 1 = \angle 2$.



(第2题)

联系拓广

3. A, B, C, D, E 五名学生猜测自己的数学成绩.
A 说: “如果我得优, 那么 B 也得优.”
B 说: “如果我得优, 那么 C 也得优.”
C 说: “如果我得优, 那么 D 也得优.”
D 说: “如果我得优, 那么 E 也得优.”
大家都没有说错. 如果 A 得优, 那么他们之中有几人得优? 如果 C 得优, 那么他们之中至少有几人得优?

$\therefore \angle AOB$ 是平角 (平角的定义).

同理, $\angle COD$ 也是平角.

$\therefore \angle 1$ 和 $\angle 2$ 都是 $\angle AOC$ 的补角 (补角的定义).

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (等角的补角相等).

3. 如果 A 得优, 那么五人都得优; 如果 C 得优, 那么至少三人得优.

提示: 由于大家都没有说错, 所以如果 A 得优, 根据 A 说的可推出 B 得优; B 得优, 根据 B 说的可推出 C 得优; C 得优, 根据 C 说的可推出 D 得优; D 得优, 根据 D 说的可推出 E 得优. 这样, A, B, C, D, E 五人都得优. 如果 C 得优, 那么可推出 D, E 也得优, 但无法确定 B, A 是否得优. 所以, 至少三人得优.

本题可以让学生进行推理的初步训练.

读一读

主要对《原本》的产生、引进、影响及意义作了介绍. 如果有可能, 可以结合现实社会政治、法律等进一步说明公理化思想的重要意义.

习题 8.4

1. 证明: $\because \angle AOC$ 是直角 (已知),

$\therefore \angle AOC = 90^\circ$ (直角等于 90°).

$\because AOB$ 是一条直线 (已知),

$\therefore \angle COB = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (补角的定义).

$\therefore \angle COB$ 是直角 (90° 的角是直角).

同理可证 $\angle BOD$, $\angle DOA$ 都是直角.

2. 证明: $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是对顶角 (已知),

$\therefore OA$ 与 OB 互为反向延长线 (对顶角的定义).

教学目标:

1. 初步了解证明的基本步骤和书写格式.

2. 会根据基本事实“同位角相等, 两直线平行”来证明“内错角相等, 两直线平行”“同旁内角互补, 两直线平行”, 并能简单应用这些结论.

3. 在证明过程中, 发展初步的演绎推理能力.

本节将证明平行线的有关判定定理. 上一课时已经明确了基本事实“同位角相等, 两直线平行”, 因此, 本课时将以这个基本事实为基础证明另外两个判定定理: “内错角相等, 两直线平行”“同旁内角互补, 两直线平行”, 并利用判定定理解决一些简单的问题. 为此, 教科书首先开门见山, 引导学生回忆平行线的判定条件, 要求学生利用基本事实证明其他的判定条件.

4 平行线的判定定理

前面我们探索过哪些两条直线平行的判别条件? 利用“两条直线被第三条直线所截, 如果同位角相等, 那么这两条直线平行”(简述为“同位角相等, 两直线平行”)这个基本事实, 你能证明它们吗?

定理 两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行.

这一定理可以简述为: 同旁内角互补, 两直线平行.

已知: 如图 8-2, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a, b 被直线 c 截出的同旁内角, 且 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补.

求证: $a \parallel b$.

证明: $\because \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$ (平角的定义),

$\therefore \angle 3$ 是 $\angle 2$ 的补角 (互补的定义).

$\because \angle 1$ 是 $\angle 2$ 的补角 (已知),

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ (同角的补角相等).

$\therefore a \parallel b$ (同位角相等, 两直线平行).

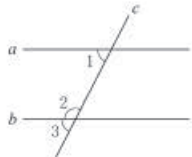


图 8-2

议一议

小明利用两块同样的三角板, 按下面的方法作出了平行线. 你认为他的作法对吗? 为什么?

教学中, 建议让学生先自主证明有关定理; 然后将学生的证明过程整理出来; 最后再与教科书中的格式进行比对, 感受证明的过程和格式规范.

至于先证明哪一个判定定理, 并没有一定之规. 当然, 静态的教科书只能做出某种选择, 但教学是动态的、生成的, 教学中应顺应学生现场的状况, 及时进行调整.

学生的证明未必和教科书完全一致, 如已经证明过“内错角相等, 两直线平行”后, 再证明“同旁内角互补, 两直线平行”时, 就不一定都用原来的基本事实“同位角相等, 两直线平行”, 可以运用“内错角相等, 两直线平行”. 总之, 只要学生的证明有理有据, 就应给予鼓励.

当然, 一定的格式规范是必须的. 在证明的初始阶段, 一定要防止学生混淆一些证明的出发点和跳步等现象. 教学中要引导学生明晰现在证明的出发点有哪些, 哪些概念、法则、基本事实、定理我们可以使用, 有些结论虽然我们已探索过, 但我们还没有严格证明, 因此现在还不能使用. 要使

学生从几何证明的开始阶段就认识到,证明的依据只能是有关概念的定义,所规定的基本事实及已经证明的定理,防止学生把以前所学的结论不假思索地用来作为本章证明的依据.特别地,作为证明的初始阶段,为了养成学生证明“有理有据”的习惯,本章内容的有关证明都详细注明了理由,教学中也应尽量要求学生这样做,同时还应要求学生说明其依据的合理性.当然,在将来的学习中,在学生已经养成严谨的学习态度之后,可以不再每一步都注明理由.

议一议

“议一议”的目的是利用平时画平行线的一种方法引出平行线的另一判定定理,并由此解释以前作图的道理.学生可以利用“内错角相等,两直线平行”说明这两条直线平行.

教学中还可以让学生利用手头的直尺、三角板等工具快捷地作出平行线,并说明相应的道理.这样,学生可能出现多种作平行线的方法,说明道理的方法可能更为多样,这样的教学更为开放.

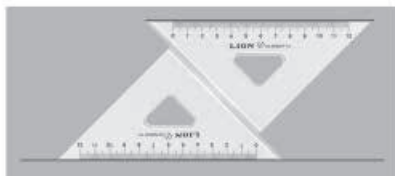


图 8-3

定理 两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行.

这一定理可以简述为: 内错角相等, 两直线平行.

已知: 如图 8-4, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a, b 被直线 c 截出的内错角, 且 $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $a \parallel b$.

证明: $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (平角的定义),

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (等量代换),

$\therefore \angle 2$ 与 $\angle 3$ 互补 (互补的定义),

$\therefore a \parallel b$ (同旁内角互补, 两直线平行).

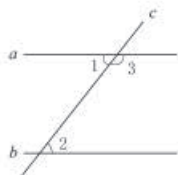


图 8-4

想一想

借助“同位角相等, 两直线平行”这一基本事实, 你能证明上面的定理吗?

随堂练习

1. 如图, 下列推理是否正确? 为什么?

(1) $\because \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore l_1 \parallel l_2$;

随堂练习

1. (1) 正确, 理由: 同位角相等, 两直线平行.

(2) 不正确, 因为由“ $\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ ”只能推出“ $l_1 \parallel l_2$ ”, 推不出“ $l_3 \parallel l_4$ ”.

(3) 正确, 理由: 内错角相等, 两直线平行.

(4) 正确, 理由: 同旁内角互补, 两直线平行.

$$(2) \because \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ,$$

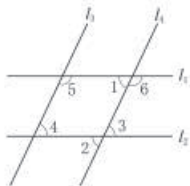
$$\therefore l_3 \parallel l_4;$$

$$(3) \because \angle 2 = \angle 4,$$

$$\therefore l_3 \parallel l_4;$$

$$(4) \because \angle 3 + \angle 6 = 180^\circ,$$

$$\therefore l_1 \parallel l_2.$$



(第1题)

2. 如图, 已知直线 $b \perp a$, $c \perp a$, 那么直线 b 与 c 平行吗? 如果平行, 请给出证明; 如果不平行, 请举出反例.



(第2题)

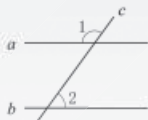
习题 8.5

知识技能

1. 已知: 如图, 直线 a, b 被直线 c 所截, 且 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

求证: $a \parallel b$.

你有几种证明方法?

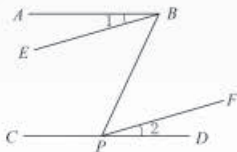


(第1题)

数学理解

2. 已知: 如图, BP 交 CD 于点 P , $\angle ABP + \angle BPC = 180^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $EB \parallel PF$.



(第2题)

2. $b \parallel c$.

证明: $\because b \perp a$ (已知),

$\therefore \angle 1 = 90^\circ$ (垂直的定义).

又 $\because c \perp a$ (已知),

$\therefore \angle 2 = 90^\circ$ (垂直的定义).

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (等量代换).

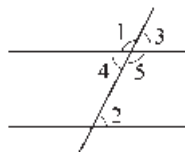
$\therefore b \parallel c$ (同位角相等, 两直线平行).

习题 8.5

1. 方法 1: 证 $\angle 3 = \angle 2$;

方法 2: 证 $\angle 4 = \angle 2$;

方法 3: 证 $\angle 5 + \angle 2 = 180^\circ$.
(如图)



(第1题)

2. 证明: $\because \angle ABP + \angle BPC = 180^\circ$ (已知),
 $\therefore \angle ABP = 180^\circ - \angle BPC$ (等式的性质).
 $\because \angle BPC + \angle BPD = 180^\circ$ (1 平角 $= 180^\circ$),
 $\therefore \angle BPD = 180^\circ - \angle BPC$ (等式的性质).
 $\therefore \angle ABP = \angle BPD$ (等量代换).
 $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知),
 $\therefore \angle EBP = \angle BPF$ (等量代换).
 $\therefore EB \parallel PF$ (内错角相等, 两直线平行).

3. 证明: $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ (已知),

$\therefore \angle BCE = 2\angle DCB = 80^\circ$ (角平分线的定义).

$\because \angle AED = 80^\circ$ (已知),

$\therefore \angle BCE = \angle AED$ (等量代换).

$\therefore DE \parallel BC$ (同位角相等, 两直线平行).

4. 可以利用“同位角相等, 两直线平行”或“同旁内角互补, 两直线平行”说明道理.

教学目标:

1. 掌握平行线的性质定理: 两条平行直线被第三条直线所截, 同位角相等, *了解这个定理的证明; 证明平行线的性质定理: 两条平行直线被第三条直线所截, 内错角相等 (或同旁内角互补); 了解平行于同一条直线的两条直线平行.

2. 在与前一节判定定理的联系中, 体会互逆的思维过程.

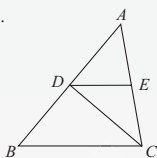
3. 在证明过程中, 进一步理解证明的步骤, 格式和方法.

本节将证明平行线的有关性质定理. 《标准》中将判定定理“两直线平行, 同位角相等”的证明作为选学内容, 因此, 教科书首先呈现了这一定理的证明过程, 供学有余力的学生自主阅读; 然后以这个性质定理为基础证明另外两个性质定理, 当然, 为了避免单调, 这里仅仅呈现了其中一个定理的证明过程, 另一个定理的证明交由学生完成.

对于这个环节的处理, 可以类似于上一课时, 首先要求学生利用“两直线平行, 同位角相等”自主证明“两直线平行, 内错角相等”“两直线平行, 同旁内角互补”; 然后将学生的证明过程整理出来; 最后再与教科书中的格式进行比对, 感受证明的过程和格式规范. 也可以和教科书的顺序一致, 首先阅读第一个性质定理的证明过程, 感受证明过程中的一些细节问题, 如, 如何画出图形, 如何结合图形写出已知、求证的, 证明过程中每一步推理的理由等; 然后, 放手让学生独立完

3. 已知: 如图, CD 平分 $\angle ACB$, $\angle DCB = 40^\circ$, $\angle AED = 80^\circ$.

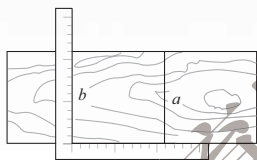
求证: $DE \parallel BC$.



(第3题)

问题解决

4. 如图, 木工师傅经常用一把直角尺画出两条平行的直线 a 和 b . 你知道这样做的道理吗?



(第4题)

5 平行线的性质定理

我们已经探索过平行线的性质, 下面证明它们.

定理 两条平行直线被第三条直线所截, 同位角相等.

已知: 如图 8-5, 直线 $AB \parallel CD$, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 AB , CD 被直线 EF 截出的同位角.

求证: $\angle 1 = \angle 2$.

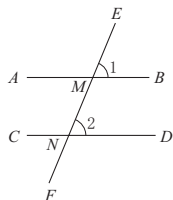


图 8-5

如果 $\angle 1 \neq \angle 2$, AB 与 CD 的位置关系会怎样呢?

***证明：**如果 $\angle 1 \neq \angle 2$ ，那么我们可以过点 M 作直线 GH ，使 $\angle EMH = \angle 2$ ，如图 8-6 所示.

根据同位角相等，两直线平行，可得到 $GH \parallel CD$.

又因为 $AB \parallel CD$ ，这样经过点 M 存在两条直线 AB 和 GH 都与直线 CD 平行.

这与“过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行”这个基本事实相矛盾.

这说明假设 $\angle 1 \neq \angle 2$ 是不成立的，所以 $\angle 1 = \angle 2$ [1].

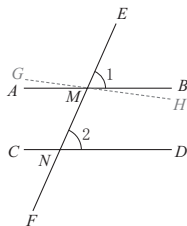


图 8-6

这一定理可以简述为：**两直线平行，同位角相等.**

利用上面的定理，我们可以证明如下结论：

定理 两条平行直线被第三条直线所截，内错角相等.

这一定理可以简述为：**两直线平行，内错角相等.**

想一想

- (1) 根据上述定理的文字叙述，你能作出相关图形吗？
- (2) 你能根据所作的图形写出已知、求证吗？
- (3) 你能说说证明的思路吗？

已知：如图 8-7，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a ， b 被直线 c 截出的内错角.

求证： $\angle 1 = \angle 2$.

证明： $\because a \parallel b$ (已知)，

$\therefore \angle 3 = \angle 2$ (两直线平行，同位角相等).

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ (对顶角相等)，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (等量代换).

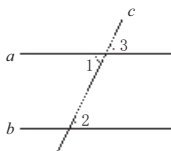


图 8-7

成第二个定理的证明，再进行交流评析.

[1] 这个定理的证明是选学内容，供学有余力的学生阅读. 证明过程中采用了反证法，后面的学习中专门会进行反证法的介绍，因此，建议教师们在这里不要提反证法的概念，证完为止，也不再在练习中出现，暂时不要求学生掌握反证法，更不要要求学生掌握反证法的证明步骤.

想一想

教学中应该强调学生动手、动口、动脑的实践，强调学生的直接经验，努力让学生在活动中获取知识. 这里，应该鼓励学生先独立思考.

议一议

通过几个课时的学习，学生已经证明了若干定理，有了一定的证明经验，及时整理经验十分必要，为此设计了这个“议一议”，引导学生回顾证明过程，梳理证明活动中的经验，以提升学生的证明能力。

证明一个命题的主要环节，并没有一个绝对统一的说法，下面是一个可供参考的说法：（1）理解题意；（2）根据题意正确画出图形；（3）根据题意写出“已知”和“求证”；（4）分析题意，探索证明的思路；（5）依据寻求的思路，运用数学符号和数学语言，有条理、清晰地写出证明过程；（6）检查表达过程是否正确、完善。

教学中，不必要求学生有一个统一的结论，只要学生能够根据自己的理解，通过举例，用自己的语言加以回答即可。

随堂练习

1. 略。

2. （1） $\angle 1 = \angle 5$ ， $\angle 4 = \angle 8$ ；

（2） $\angle 1 + \angle 2 + \angle 8 + \angle 7 = 180^\circ$ ，
 $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ 。

类似地，还可以证明：

定理 两条平行直线被第三条直线所截，同旁内角互补。

这一定理可以简述为：两直线平行，同旁内角互补。

做一做

已知：如图 8-8，直线 $a \parallel b$ ， $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a 、 b 被直线 c 截出的同旁内角。

求证： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ 。

请你写出证明过程。

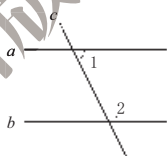


图 8-8

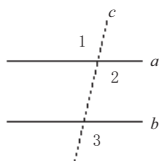
议一议

你能说说命题证明的一般步骤吗？

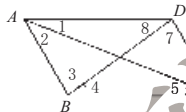
随堂练习

1. 已知：如图，直线 a 、 b 被直线 c 所截，且 $a \parallel b$ 。

求证： $\angle 1 = \angle 3$ 。



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，按照题目中给出的条件，补全结论，并给出证明：

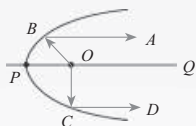
（1）已知 $AD \parallel BC$ ，可以推出哪些角相等？

（2）已知 $AB \parallel DC$ ，可以推出哪些角的和是 180° ？

习题 8.6

知识技能

1. 探照灯以及其他很多灯具都与抛物线有关. 如图, 从点 O 照射到抛物线上的光线 OB , OC 等反射以后沿着与 POQ 平行的方向射出. 图中如果 $\angle BOP = 45^\circ$, $\angle QOC = 88^\circ$, 那么 $\angle ABO$ 和 $\angle DCO$ 各是多少度?



(第1题)

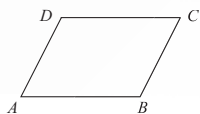


(第2题)

2. 已知: 如图, $AD \parallel BC$, $\angle ABD = \angle D$.
求证: BD 平分 $\angle ABC$.

数学理解

3. 已知: 如图, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
求证: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.



(第3题)

6 三角形内角和定理

我们知道, 三角形三个内角的和等于 180° . 你还记得这个结论的探索过程吗?

(1) 如图 8-9, 当时, 我们是把 $\angle A$ 撕下后移到了 $\angle 1$ 的位置, 推

教学目标:

1. 掌握“三角形内角和定理”的证明及其简单应用.
2. 掌握三角形内角和定理的两个推论及其证明.
3. 对比过去撕纸等探索过程, 体会思维实验和符号化的理性作用.
4. 体会几何中不等关系的简单证明.
5. 引导学生从内和外、相等和不等不同角度对三角形作更全面的思考.
6. 通过一题多解、一题多变等, 初步体会思维的多向性, 引导学生的个性化发展.

习题 8.6

1. $\angle ABO = 45^\circ$, $\angle DCO = 92^\circ$.
2. 证明: $\because AD \parallel BC$ (已知),
 $\therefore \angle D = \angle DBC$ (两直线平行, 内错角相等).
又 $\because \angle ABD = \angle D$ (已知),
 $\therefore \angle ABD = \angle DBC$ (等量代换).
 $\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$ (角平分线的定义).
3. 证明: $\because AB \parallel CD$ (已知),
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$, $\angle B + \angle C = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补).
 $\because AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$, $\angle D + \angle C = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补).
 $\therefore \angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (同角的补角相等).

小学阶段学生已经学习过“三角形的内角和等于 180° ”，七年级上学期学生又通过活动再次验证了这一结论，本节则要严格地证明这一结论，并利用这一结论推导有关三角形外角的定理，利用这些定理解决简单的问题. 具体地，第 1 课时的重点是证明三角形内角和定理，进行简单的应用；第 2 课时，学习三角形外角的概念，探索并证明三角形外角有关的几个定理. 第 3 课时，利用所学内容，探索并证明一些综合问题.

[1] 对于三角形内角和定理等学生已经探究过的结论，本套教科书一般都是先引导学生回顾原来的探究与验证的过程，力图从探究与验证活动中获取证明的思路. 三角形内角和定理的证明，需要添加辅助线；但不管添加什么位置的辅助线，其目的都是将这些角“凑”到一起；而在七年级上册验证三角形内角和的活动中，学生已经有了将三个角“凑”到一起的经验，因此，这样的回顾是十分必要的.

教学中，可以引导学生思考：如果将两个角 $\angle A$ ， $\angle B$ 都移到 $\angle C$ 处，有哪些方法？如果不动能否做出某些辅助的线，实现这种移动？如果仅仅将 $\angle A$ 移动到 $\angle C$ 处，得到如图的图形，不移动 $\angle A$ ，能说明内角和定理吗？在学生思考的基础上，再要求学生写出严格的证明过程，最后进行交流、评析.

[2] 人们从来就是用自己的聪明才智创造条件、解决问题的. 当问题的条件不够时，添加辅助线，构造新图形，形成新关系，找到已知与未知的桥梁，把问题转化成自己已经会解的情况，这是解决问题常用的策略之一.

辅助线的添法没有统一的规律，要根据需要而定. 本题就是通过辅助线把三个角“搬”到一起，让三个顶点重合、两条边形成一条直线，以便利用平角定义解决.

出 b 与 a 平行，通过以 C 为顶点的三个角的和是 180° 探索出这个结论的. 如果不撕下 $\angle A$ ，那么你能通过作图的方法达到移动 $\angle A$ 的效果吗？

(2) 根据前面给出的基本事实和定理，你能用自己的语言说说这一结论的证明思路吗？你能用比较简洁的语言写出这一证明过程吗？与同伴进行交流. [1]

已知：如图 8-10， $\triangle ABC$ 是任意一个三角形.

求证： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

分析：受图 8-9 的启发，我们可以以点 C 为顶点，以 CA 为一边在三角形外部作 $\angle 1 = \angle A$ ，再作 BC 的延长线，得到平角 $\angle BCD$ （如图 8-11），可以证明 $\angle ECD = \angle B$. 由此说明上述猜想是正确的.

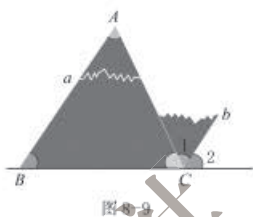


图 8-9

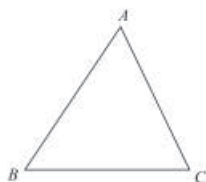


图 8-10



图 8-11

这里的 CD ， CE 称为辅助线. 辅助线通常画成虚线. [2]

证明：作 BC 的延长线 CD ，在 $\triangle ABC$ 的外部，以 CA 为一边，作 $\angle ACE = \angle A$ （如图 8-11），于是， $CE \parallel BA$ （内错角相等，两直线平行）.

$\therefore \angle 2 = \angle B$ （两直线平行，同位角相等）.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle ACB = 180^\circ$ （平角的定义）.

$\therefore \angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ （等量代换）.

三角形内角和定理 三角形三个内角的和等于 180° .

议一议

(1) 在证明三角形内角和定理时, 小明的想法是把三个角“凑”到顶点 A 处, 他过点 A 作直线 $PQ \parallel BC$ (如图 8-12). 他的想法可行吗? 如果可行, 你能写出证明过程吗?

(2) 你还能用其他方法证明三角形内角和是 180° 吗? 与同伴进行交流.

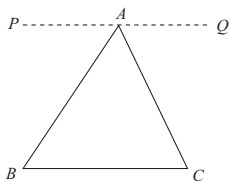


图 8-12

例 1 如图 8-13, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle ABC = 38^\circ$, $\angle ACB = 62^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$. 求 $\angle ADB$ 的度数.

解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$.

$$\therefore \angle B = 38^\circ, \angle C = 62^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 80^\circ.$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 40^\circ.$$

在 $\triangle ADB$ 中, $\angle B + \angle BAD + \angle ADB = 180^\circ$.

$$\therefore \angle B = 38^\circ, \angle BAD = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = 102^\circ.$$

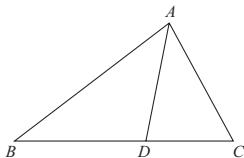


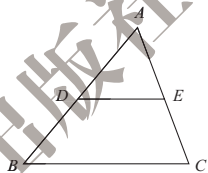
图 8-13

随堂练习

1. 证明: 直角三角形的两个锐角互余.

2. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

求证: $\angle ADE = 50^\circ$.



(第 2 题)

随堂练习

1. 已知: 如图, $\angle A$, $\angle B$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的两个锐角, $\angle C = 90^\circ$.

求证: $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

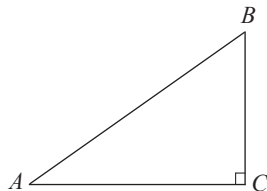
证明: $\because \angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三个内角 (已知),

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ (三角形内角和定理)}.$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C \text{ (等式的性质)}.$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ \text{ (已知)},$$

$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \text{ (等量代换)}.$$



(第 1 题)

议一议

如果抓住“把三个角‘搬’到一起, 并且让三个顶点重合, 以便利用平角定义”, 那么方法可以多种多样.

小明的方法是把三个角“搬”到点 A , 可行.

例 1

得到三角形内角和定理, 自然应通过简单应用加以巩固, 为此设计了例 1. 教学中, 应鼓励学生先自主解决, 然后进行对比、交流.

解几何题, 第一步就是在图形中准确地标注信息. 教学中应引导学生将题目中的信息清晰地标注到图形中, 并进一步思考, 根据这些信息还可以得到哪些结论, 尽可能地标注, 这时也许问题已经解决了. 另外, 标注的顺序, 可能正是反映解题的顺序. 教学中, 注意引导学生体会这一点.

2. 证明: $\because \angle A = 60^\circ, \angle C = 70^\circ$ (已知),
 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (三角形内角和定理),
 $\therefore \angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C$ (等式的性质).
 $\therefore \angle B = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$ (等量代换).
又 $\because DE \parallel BC$ (已知),
 $\therefore \angle ADE = \angle B = 50^\circ$ (两直线平行, 同位角相等).

习题8.7

1. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle B = 90^\circ$.

求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明: $\because \angle A, \angle B, \angle C$ 是 $\triangle ABC$ 的三个内角 (已知),

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (三角形内角和定理).

$\therefore \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$ (等式的性质).

$\because \angle A + \angle B = 90^\circ$ (已知),

$\therefore \angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (等量代换).

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形 (直角三角形的定义).

2. 证明: $\because \angle ACB = 90^\circ$ (已知),

$\therefore \angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 90^\circ - \angle ACD$ (等量代换).

又 $\because CD \perp AB$ (已知),

$\therefore \angle ADC = 90^\circ$ (垂直的定义).

$\therefore \angle A + \angle ACD = 90^\circ$ (直角三角形的两锐角互余).

$\therefore \angle A = 90^\circ - \angle ACD$ (等式的性质).

$\therefore \angle A = \angle DCB$ (等量代换).

3. 方法一: 过四边形 $ABCD$ 的一个顶点作对角线, 连接 AC (或 BD), 将四边形 $ABCD$ 转化为两个三角形, 利用三角形内角和定理进行证明.

方法二: 在四边形 $ABCD$ 内任取一点 O , 连接 OA, OB, OC, OD , 将四边形 $ABCD$ 转化为四个三角形, 可得四边形的内角和等于 $4 \times 180^\circ - 360^\circ$ (一个周角).

方法三: 任取四边形 $ABCD$ 一条边上的一点 P (如 BC 边), 连接 PA, PD , 将四边形 $ABCD$ 转化为三个三角形, 可得四边形的内角和等于 $3 \times 180^\circ - 180^\circ$ (一个平角).

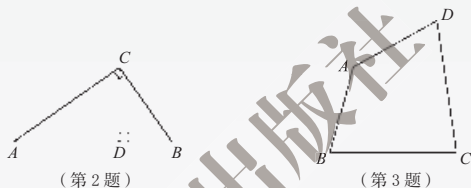
习题 8.7

知识技能

1. 证明：有两个角互余的三角形是直角三角形.

2. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，垂足为点 D .

求证： $\angle A = \angle DCB$.



(第3题)

数学理解

※3. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是任意一个四边形.

求证： $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$.

本题实际上证明了如下结论：四边形的内角和等于 360° .

联系拓广

※4. 在证明三角形内角和定理时，是否可以把三角形的三个角“凑”到 BC 边上的一点 P 处（如图（1））？如果把三个角“凑”到三角形内的一点 P 处呢（如图（2））？如果“凑”到三角形外的一点 P 处呢（如图（3））？你还能想出其他证法吗？



4. 力图再一次强化学生“抓住根本”的意识.

抓住“把三个角‘搬’到一起，让三个顶点重合、两条边形成一条直线，以便利用平角定义”这一基本思想，可以把三个角集中到三角形的某一个顶点（如前面给出的把三个角集中到 C 或 A ）；可以把它们集中到三角形的一边上，如图（1）；集中到三角形内部的一点，如图（2）；还可以把它们集中到三角形外部的一点，如图（3）.

学数学，要善于抓住不变的根本，又要善于灵活地在变化中认识、处理和解决问题.

本课时，将依次学习：三角形外角的概念，探索并证明三角形外角有关的几个定理，并利用它们解决一些简单的问题. 相对而言，外角的概念和关于外角的两个定理比较简单，因此，本课时的重点在于运用这些解决问题，在解决问题中发展学生的推理能力.

本课时，直接明晰外角的概念，似乎不符合本套教科书关注探究的一贯风格. 确实，本套教科书十分重视发展学生的探究能力，尽可能鼓励学生自主完成概念的概括、命题的探究、问题的解决. 但外角这个概念并不是本源的，探究的意义不大，为此，教科书直接明晰了这一概念，并要求学生在图中标注其他外角，通过其他外角深化学生对外角概念的理解；同时，在图中标注其他外角的过程也为下面发现外角的有关结论提供了铺垫.

$\triangle ABC$ 内角的一条边与另一条边的反向延长线组成的角，称为 $\triangle ABC$ 的外角. 如图 8-14， $\angle 1$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角. 你能在图中画出 $\triangle ABC$ 的其他外角吗？

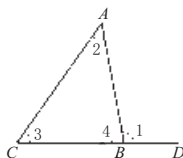


图 8-14



议一议

$\angle 1$ 与图中的其他角有什么关系？能证明你的结论吗？与同伴进行交流.

定理 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和.

定理 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.^[1]

上面这两个定理是由三角形内角和定理直接推导出来的. 像这样，由一个基本事实或定理直接推出的真命题，叫做这个基本事实或定理的推论 (corollary). 推论可以当作定理使用.

例 2 已知：如图 8-15，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = \angle C$ ， AD 平分外角 $\angle EAC$.

求证： $AD \parallel BC$.

分析：要证明 $AD \parallel BC$ ，只需证明“同位角相等”，或“内错角相等”，或“同旁内角互补”.

证明： $\because \angle EAC = \angle B + \angle C$ (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和)，

$\angle B = \angle C$ (已知)，

$\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle EAC$ (等式的基本性质).

$\because AD$ 平分 $\angle EAC$ (已知)，

$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle EAC$ (角平分线的定义).

$\therefore \angle DAC = \angle C$ (等量代换).

$\therefore AD \parallel BC$ (内错角相等，两直线平行).

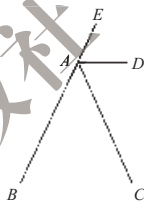


图 8-15

议一议

希望通过“议一议”发现有关外角的两个定理.“有什么关系”相对而言还比较宽泛，教学中可以对学生进行适度的引导. 如，图中 $\angle 1$ 与 $\triangle ABC$ 的三个内角有什么大小关系 (可以是不等关系，也可以是等量关系)，尽可能多地找出来；在三角形变化的过程中，这样的关系还成立吗？

^[1] 对于三角形内角和定理的两个推论，关键要让学生明确“不相邻”的含义，即三角形的一个外角等于和它“不相邻”的两个内角的和，大于任何一个和它“不相邻”的内角. 在应用这两个推论时，学生往往因不注意“不相邻”的要求而经常出错，所以在教学时应强调“不相邻”. 对于三角形的每一个外角，都有一个内角是它的邻补角，而其余两个内角都与这一外角不相邻.

想一想

对于例2,你还有其他证明方法吗?

例3 已知:如图8-16, $\angle BAF$, $\angle CBD$, $\angle ACE$ 是 $\triangle ABC$ 的三个外角.

求证: $\angle BAF + \angle CBD + \angle ACE = 360^\circ$.

证明: $\because \angle BAF$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角(已知),

$\therefore \angle BAF = \angle 2 + \angle 3$ (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和).

同理, $\angle CBD = \angle 1 + \angle 3$, $\angle ACE = \angle 1 + \angle 2$.

$\therefore \angle BAF + \angle CBD + \angle ACE = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$ (等式的基本性质).

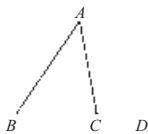
$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (三角形内角和定理),

$\therefore \angle BAF + \angle CBD + \angle ACE = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$ (等量代换).

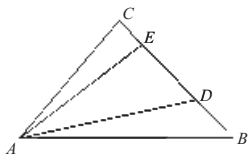
图 8-16

随堂练习

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 45^\circ$, 外角 $\angle ACD = 100^\circ$. 求 $\angle B$ 和 $\angle ACB$ 的大小.



(第1题)



(第2题)

2. 如图, 填空:

(1) $\angle ADE = \angle B + \angle$ _____; $\angle ADB = \angle C + \angle$ _____ $= \angle AED + \angle$ _____.

(2) 用 “>” 或 “<” 填空:

$\angle AEC$ _____ $\angle ADE$; $\angle AEC$ _____ $\angle B$.

相对于前几课时的题目而言,本课时两个例题的图形更为复杂一些,因此,教科书以例题的形式呈现题目,并给出了例2的分析过程.当然,教学中仍应鼓励学生先自行解决,在有困难的时候,再寻求老师和同伴的帮助.

随堂练习

1. $\angle B = 55^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$.

2. (1) $\angle DAB$, $\angle CAD$, $\angle EAD$.

(2) $>$; $>$.

习题8.8

1. $\angle B = 50^\circ$.

提示: $\because \angle A + \angle B = \angle ACD = 150^\circ$,
 $\angle A = 2\angle B$,
 $\therefore 2\angle B + \angle B = 150^\circ$.
 $\therefore \angle B = 50^\circ$.

2. $\angle AEC = 75^\circ$.

提示: 先求出 $\angle BAC = 70^\circ$.

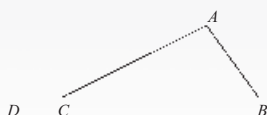
3. $\angle BEC = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle AEC$.

证明略.

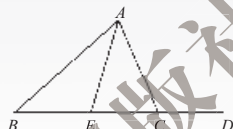
习题 8.8

知识技能

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 2\angle B$, 外角 $\angle ACD = 150^\circ$, 求 $\angle B$ 的度数.



(第1题)

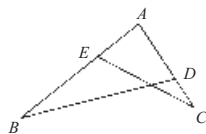


(第2题)

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 40^\circ$, AE 是 $\angle BAC$ 的平分线, 外角 $\angle ACD = 110^\circ$. 求 $\angle AEC$ 的度数.

数学理解

3. 如图, 已知点 D, E 分别在 AC, AB 上, 如果 $\angle B = \angle C$, 那么除对顶角外, 图中还有哪些角分别相等? 证明你的结论.



(第3题)

已知: 如图 8-17, 五角星形的顶角分别是 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$.

求证: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ$.

证明: $\because \angle AFG$ 是 $\triangle FCE$ 的一个外角 (外角的定义),

$\therefore \angle AFG = \angle C + \angle E$ (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和).

同理, $\angle AGF = \angle B + \angle D$.

$\because$ 在 $\triangle AFG$ 中, $\angle A + \angle AFG + \angle AGF = 180^\circ$ (三角形内角和定理),

$\therefore \angle A + \angle C + \angle E + \angle B + \angle D = 180^\circ$ (等量代换).

由此可知, 五角星形五个顶角的和等于 180° .

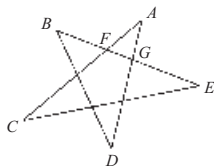


图 8-17

议一议

在证明五角星形五个顶角的和等于 180° 时, 小明想通过连接 CD , 把五个角“凑”到 $\triangle ACD$ 内. 他的想法可行吗? 与同伴进行交流.

例 4 已知: 如图 8-18, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle 1$ 是它的一个外角, E 为边 AC 上的一点, 延长 BC 到点 D , 连接 DE .

求证: $\angle 1 > \angle 2$.

证明: $\because \angle 1$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角 (已知),

$\therefore \angle 1 > \angle 3$ (三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角).

$\because \angle 3$ 是 $\triangle CDE$ 的一个外角 (外角的定义),

$\therefore \angle 3 > \angle 2$ (三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角).

$\therefore \angle 1 > \angle 2$.

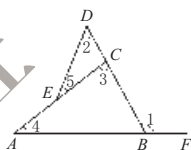


图 8-18

随堂练习

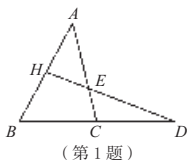
1. 如图, 下列哪种说法一定正确?

(1) $\angle B > \angle ACD$;

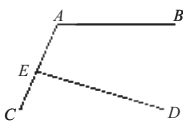
(2) $\angle B + \angle ACB = 180^\circ - \angle A$;

(3) $\angle B + \angle ACB < 180^\circ$;

(4) $\angle HEC > \angle B$.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 已知: 如图, $AB \parallel CD$.

求证: $\angle CAB = \angle CED + \angle CDE$.

议一议

这一问题可以证明如下:

连接 CD , BD 与 CE 交于点 H , 因为 $\angle BHC$ 既是 $\triangle CDH$ 的外角, 也是 $\triangle BEH$ 的外角, 所以 $\angle CDH + \angle DCH = \angle B + \angle E$, 由此可证五角星形五个顶角之和为 180° .

例 4

这是本套教科书中首次证明几何中的不等关系, 学生难免有些不习惯, 因此, 如果学生有困难, 适当的引导是必要的. 如本题可以有下面的引导方式: 要证明两个角的不等关系, 我们有哪些关于角的不等关系的结论? 能直接运用这个结论吗? 困难在哪里?

教学中, 应该适当注意. 本例想让学生复习“三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角”, 同时体会某些不等关系的递推和论证过程.

需要说明的是, 本例证明中用到了不等关系的传递性, 即“如果 $a > b$, $b > c$, 那么 $a > c$ ”. 在初中阶段, 这一结论可以看作不等式的性质而作为基本事实使用. 如果学生有疑问, 教师可结合实例加以解释.

随堂练习

1. (2) (3) (4) 都一定正确. 这是一道多选题.

2. 证明: $\because AB \parallel CD$ (已知),

$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle C$ (两直线平行, 同旁内角互补).

又 $\because \angle C = 180^\circ - (\angle D + \angle CED)$ (三角形内角和定理),

$\therefore \angle A = 180^\circ - [180^\circ - (\angle D + \angle CED)]$ (等量代换),

即 $\angle CAB = \angle CED + \angle CDE$.

习题8.9

1. 证明: $\because \angle ADC = \angle B + \angle BAD$ (三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和), $\angle DAC = \angle B$ (已知),

$$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAD + \angle B \text{ (等量代换)},$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BAC \text{ (等量代换)}.$$

2. $\angle BFC = 115^\circ$.

3. 提示:

(1) 延长 BD 交 AC 于点 E ,
可得 $\angle BDC > \angle DEC$
 $> \angle A$;

$$(2) \angle BDC = \angle C + \angle DEC \\ = \angle C + \angle B + \angle A.$$

第(2)题实际给出了一个关系:如果把图中所给图形称为弓形,那么弓形中如 $\angle BDC$ 的角等于其三个内角的和,即有“把三个内角一起移出图形外部”的作用.

题中提出:“如果点 D 在线段 BC 的另一侧,结论会怎样?”

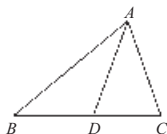
对此,可以引导学生进行适当探索:如图,如果以大于平角的 $\angle BDC$ 而论,仍有 $\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$. 证明思路是:连接 AD 并延长至 E , 因为 $\angle BDE = \angle BAD + \angle B$, $\angle CDE = \angle CAD + \angle C$, 于是 $\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$. 如果以小于平角的 $\angle BDC$ 而论,则有 $360^\circ - \angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C$, 或 $\angle BDC = 360^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$.

习题 8.9

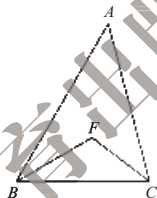
数学理解

1. 已知:如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle DAC = \angle B$.

求证: $\angle ADC = \angle BAC$.



(第1题)



(第2题)

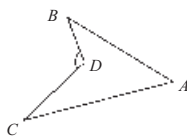
2. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, BF 平分 $\angle ABC$, CF 平分 $\angle ACB$, $\angle A = 50^\circ$, 求 $\angle BFC$ 的大小.

联系拓广

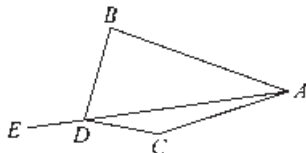
3. 如图,求证: (1) $\angle BDC > \angle A$;

- (2) $\angle BDC = \angle B + \angle C + \angle A$.

※如果点 D 在线段 BC 的另一侧,结论会怎样?



(第3题)



(第3题)

回顾与思考

1. 直观是重要的,但它有时也会欺骗人.你能找到这样的例子吗?
2. 请用自己的语言说说什么是定义、命题,并举例说明.
3. 什么是真命题?什么是假命题?怎样判断一个命题是真命题还是假命题?
4. 请用自己的语言说一说什么是基本事实、定理和推论.本书中作为证明出发点的基本事实有哪些?
5. 为什么需要证明?请你用自己的语言说一说证明的基本步骤.
6. 什么条件下两条直线平行?两条直线平行又会怎样?这两类命题的条件和结论有什么关系?你会证明它们吗?
7. 三角形内角和定理怎么证明?三角形的外角与内角有什么关系?
8. 用适当的方式梳理本章的知识,并与同伴进行交流.

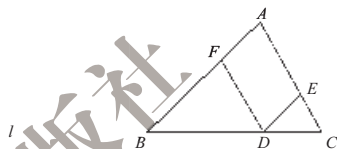
复习题

知识技能

1. 小明画了一个图(如图),你能分别根据下面的基本事实或定理,说明他画的图是错误的吗?
 - (1) 平行线的有关基本事实和定理;
 - (2) 三角形内角和定理.



(第1题)



(第2题)

2. 请将下面证明中每一步的理由填在相应的括号内:

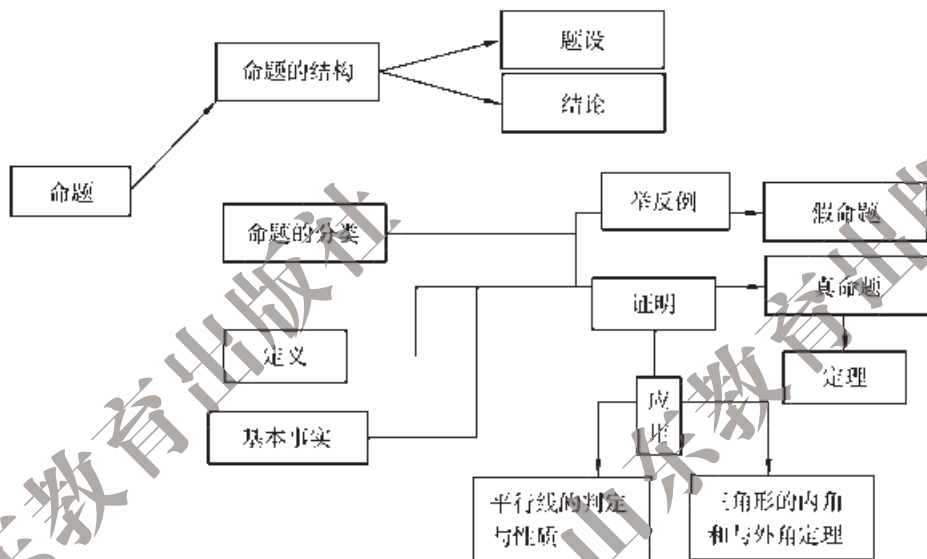
已知:如图, D, E, F 分别是 BC, CA, AB 上的点, $DE \parallel BA, DF \parallel CA$.

回顾与思考

教科书以问题的形式,引导学生回顾与梳理本章知识,以形成完善的知识结构.教学中,教师应充分发挥学生的主体性,让学生自主进行知识的回顾与梳理工作,并通过班级交流与相互评析,促进学生对有关知识的理解,提升学生知识梳理的能力.

对于具体各个问题,希望学生用自己的语言回答,而不宜强调原封不动地复述教科书中的内容.对于平行线的判定定理和性质定理,希望学生能知道它们的条件和结论正好相反,可以不要他们知道判定与性质这两个名字.此外,教学中还应结合具体例子进行有关知识的梳理与巩固,在具体例子中,让学生对证明的基本步骤、探寻证明思路有一个更为全面的了解.例如,在寻求证明思路的过程中,可以从已知向求证探索,也可以倒过来从求证向已知追溯,还可以从已知和求证两个方向分别出发,互相接近.

下面是一个可供参考的本章知识结构图：



下面是一个可供参考的典型例题.

例 已知：如图 1，直线 $AB \parallel ED$. 求证： $\angle ABC + \angle CDE = \angle BCD$.

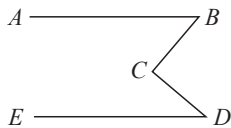


图 1

本题解决思路很多，分别作下面的一些辅助线，都可以解决：① 连接 BD ，② 过 C 点作 $CF \parallel AB$ ，③ 延长 BC 交 DE 于点 F .

不管作哪一条辅助线，最终都将运用三角形的内角和或者平行线的性质进行求解，因此，这是考查学生对于本章知识运用能力的一道典型问题.

当然，由于需要作辅助线，本题对很多学生而言具有一定的困难，教学中加以指导是必要的. 但我们一定要把握好指导的“度”. 如果指导过渡，本可以由学生自主解决的，由于教师的指导，学生反而失去了思考的机会，能力难有机会发展. 因此，教学中应对学生的状况作出准确的判断. 可以先给予学生一些宽泛的指导，如：由条件“两直线平行”可以得到哪些结论？本题中条件运用的困难在哪里？如何更好地将条件用起来？这样的指导是普适的，对于多数问题都有效，旨在促进学生解题分析的习惯的养成. 如果在这样的帮助下，学生还不能解决问题，这时可以再进行一些更加具体化的指导、提示，如：结论“ $\angle ABC + \angle CDE = \angle BCD$ ”，能不能将 $\angle BCD$ 分解成两个小的角，它们正好等于 $\angle ABC$ ， $\angle CDE$ ？哪个定理涉及一个角等于两个角的和？能不能应用这个定理？

解决问题后，自然应引导学生进行反思、交流，以获得解决这类问题的通用的思路，发展学生的解题能力. 如对于本题，可以引导学生回顾解题过程，积累解题经验，可以引导学生思考多样的方法以及这些方法的共性，可以引导学生对问题加以推广到一般化.

下面是可以参考的几个反思问题：

- (1) 说说解决本题中你的困难是什么，你是如何突破的.
- (2) 还有哪些方法？与同伴交流，并在图中进行简单的标注，将思路记录下来.

(3) 逆转变式：将本题的条件和结论对换，命题还成立吗？也就是说，如图 1，已知 $\angle ABC + \angle CDE = \angle BCD$ ，这时直线 AB, ED 平行吗？说说你的理由。

(4) 一般化变式：改变点 C 的位置，图形会发生变化， $\angle ABC, \angle CDE$ 和 $\angle BCD$ 的关系会发生变化吗？试在下面三个图形中，写出 $\angle ABC, \angle CDE$ 和 $\angle BCD$ 之间的等量关系。



图 2

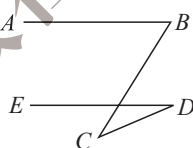


图 3

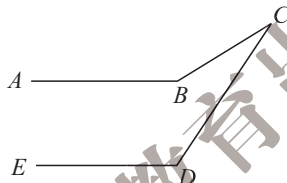


图 4

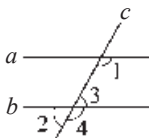
复习题

1. (1) 若 $\angle 1 = 90^\circ, \angle 2 = 90^\circ$ ，则 $\angle 1 = \angle 2$ ， $PA \parallel PB$ （同位角相等，两直线平行）。但 PA 与 PB 相交，所以图形是错误的。

(2) 若 $\angle 1 = 90^\circ, \angle 2 = 90^\circ$ ，则 $\angle PAB = \angle PBA = 90^\circ$ ，但三角形三个内角的和是 180° ，所以图形是错误的。

2. 已知；两直线平行，内错角相等；已知；两直线平行，同位角相等；等量代换。

3. 证法一：如图，



(第3题)

$\therefore a \parallel b$ (已知),
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (两直线平行, 同旁内角互补).

$\therefore \angle 2 = \angle 3$ (对顶角相等),

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (等量代换).

证法二：如图， $\therefore a \parallel b$ (已知),

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ (两直线平行, 同位角相等).

$\therefore \angle 4 + \angle 2 = 180^\circ$ (平角的定义),

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (等量代换).

求证： $\angle FDE = \angle A$.

证明： $\therefore DE \parallel BA$ (),

$\therefore \angle FDE = \angle BFD$ ().

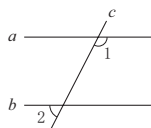
$\therefore DF \parallel CA$ (),

$\therefore \angle BFD = \angle A$ ().

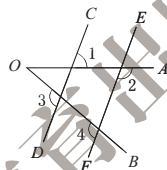
$\therefore \angle FDE = \angle A$ ().

3. 已知：如图，直线 a, b 被直线 c 所截，且 $a \parallel b$.

求证： $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.



(第3题)

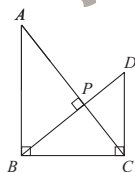


(第4题)

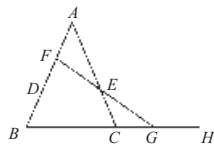
4. 已知：如图， $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

求证： $\angle 3 = \angle 4$.

5. 如图， $AB \perp BC, BC \perp CD, AC \perp BD$. 如果 $\angle A = \alpha$, 那么 $\angle ABP$ 和 $\angle PCD$ 分别等于多少?



(第5题)



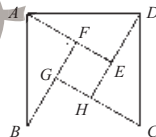
(第6题)

6. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$, F 是 AB 上的一点， FE 的延长线交 BC 的延长线于点 G .

求证： $\angle EGH > \angle ADE$.

7. 如图是我国古代数学书中的一个重要图形，称为“弦图”，借助它可以证明勾股定理. 在弦图中， $AE \perp BF, BF \perp CG, CG \perp DH, DH \perp AE$.

求证： $AE \parallel CG, BF \parallel DH$. 你能想出几种证明方法?



(第7题)

4. 证明：如图，

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (已知), $\angle 2 = \angle 5$ (对顶角相等),

$\therefore \angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ (等量代换).

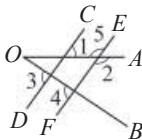
$\therefore CD \parallel EF$ (同旁内角互补, 两直线平行).

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ (两直线平行, 同位角相等).

5. $\angle ABP = 90^\circ - \alpha, \angle PCD = \alpha$.

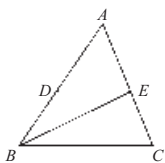
6. 略.

7. 提示：用“同位角相等，两直线平行”“内错角相等，两直线平行”“同旁内角互补，两直线平行”，都可以证明.

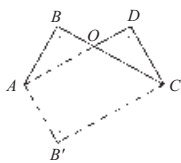


(第4题)

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $\angle DBE = 30^\circ$, $\angle ECB = 25^\circ$, 求 $\angle BDE$ 的度数.



(第8题)



(第9题)

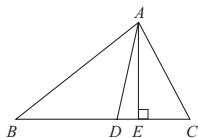
9. 把长方形 $AB'CD$ 沿对角线 AC 折叠, 得到如图所示的图形. 已知 $\angle BAO = 30^\circ$, 求 $\angle AOC$ 和 $\angle BAC$ 的度数.

数学理解

10. 回答下列问题:

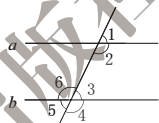
- (1) 三角形的一个内角一定小于 180° 吗? 一定小于 90° 吗?
- (2) 一个三角形中最多有几个直角? 最多有几个钝角?
- (3) 一个三角形的最大角不会小于 60° , 为什么? 最小角不会大于多少度?

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 40^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, AD 平分 $\angle BAC$, $AE \perp BC$. 求 $\angle DAE$ 的度数.



(第11题)

12. 如图, 请利用 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ 这 6 个角, 写出能够证明 $a \parallel b$ 的条件 (能写出几个就写几个).



(第12题)

8. $\angle BDE = 125^\circ$.

9. $\angle AOC = 120^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$.

10. 本题是考查学生对基本概念的理解.

(1) 三角形的一个内角一定小于 180° , 不一定小于 90° ;

(2) 一个三角形中最多有一个直角, 最多有一个钝角;

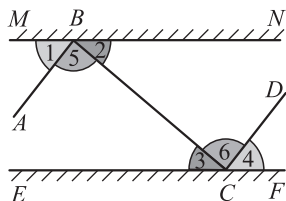
(3) 三角形中的最大角不会小于 60° . 因为, 若最大角小于 60° , 那么三角形的三个内角的和就小于 180° . 这与三角形的内角和等于 180° 矛盾. 类似地, 三角形中最小角不会大于 60° .

其中, 第 (3) 题关于三角形最大角和最小角的问题, 涉及对变动中边界的认识, 在解决某些数学问题时经常会用到.

11. $\angle DAE = 10^\circ$.

12. 符合要求的条件很多, 如: $\angle 1 = \angle 3$, 或 $\angle 1 = \angle 5$, 或 $\angle 2 = \angle 4$, 或 $\angle 2 = \angle 6$, 或 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, 或 $\angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$, 或 $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$, 或 $\angle 1 + \angle 6 = 180^\circ$.

13. $AB \parallel CD$. 如图,



(第13题)

$\because MN \parallel EF$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$.

$\because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

$\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = 180^\circ$

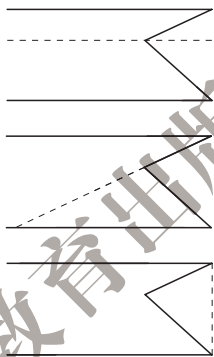
$= \angle 3 + \angle 4 + \angle 6$,

$\therefore \angle 5 = \angle 6$.

$\therefore AB \parallel CD$.

14. $\angle C = 22.5^\circ$.

15. (1) 这是一道可以进行各种发散的好题. 作辅助线的方法很多 (如图).

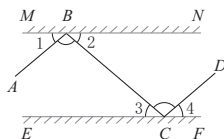


(第15(1)题)

(2) 当点 C 在 AB 与 ED 之外时, $\angle ABC - \angle CDE = \angle BCD$.

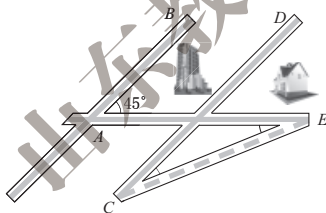
应该通过此题引导学生增强图形变化的意识. 在第 (1) 题的基础上, 可以对图形作各种变化, 如点 C 运动到平行线的外边, 或点 C 运动到点 B, D 的右侧使 $\angle ABC$ 和 $\angle CDE$ 成为钝角, 也可以不止一个点 C 等. 当然, 学生还可能体会到点 C 在内和外与正负数的关系. 教学中, 只要求学生解决教科书上的问题, 不必提出过高的要求. 但是应该给学生留有较大的探索余地, 对学生的探索精神应该给予肯定和鼓励.

13. 如图, MN, EF 分别表示两面互相平行的镜面, 一束光线 AB 照射到镜面 MN 上, 反射光线为 BC , 此时, $\angle 1 = \angle 2$; 光线 BC 经镜面 EF 反射后的反射光线为 CD , 此时 $\angle 3 = \angle 4$. 试判断 AB 与 CD 的位置关系, 你是如何思考的?



(第13题)

14. 某城市几条道路的位置关系如图所示, 道路 AB 与道路 CD 平行, 道路 AB 与道路 AE 的夹角为 45° . 城市规划部门想新修一条道路 CE , 要求 $\angle C = \angle E$, 求 $\angle C$ 的度数.



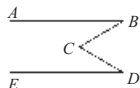
(第14题)

联系拓展

15. (1) 已知: 如图 (1), 直线 $AB \parallel ED$.

求证: $\angle ABC + \angle CDE = \angle BCD$;

(2) 如图 (2), 如果点 C 在 AB 与 ED 之外, 其他条件不变, 那么会有什么结果? 你还能就本题作出什么新的猜想?

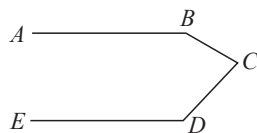


(1)



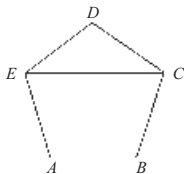
(2)

(第15题)



(第15(2)题)

16. 如图, 在五边形 $ABCDE$ 中, $\angle A = \angle B$, $\angle BCD = \angle DEA$, 并且 $\angle CED = \angle ECD$. 你能判定 AB 与 EC 平行吗? 为什么?



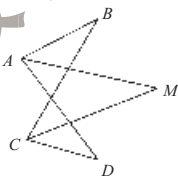
(第16题)

17. 证明:

- (1) 五边形的内角和等于 540° ;
 (2) n 边形的内角和等于 $(n-2) \cdot 180^\circ$.

18. 已知: 如图, AM , CM 分别平分 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$.

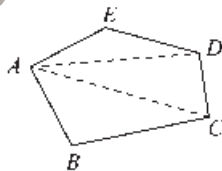
- (1) 如果 $\angle B = 32^\circ$, $\angle D = 38^\circ$, 求 $\angle M$ 的度数;
 (2) 求证: $\angle M = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.



(第18题)

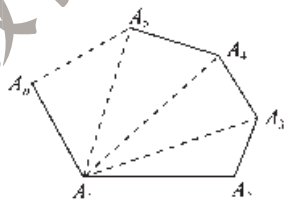
16. $AB \parallel EC$. 提示: 先证 $\angle AEC = \angle BCE$, 再利用四边形的内角和等于 360° , 证 $\angle A + \angle AEC = 180^\circ$.

17. 提示: (1) 如图, 连接 AC , AD , 把五边形分成三个三角形, 五边形的五个内角的和就是这三个三角形的内角的和. 因此, 五边形的内角和等于 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.



(第17(1)题)

- (2) 如图, 过 n 边形的一个顶点 (如 A_1) 的所有对角线把 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形, 这 $(n-2)$ 个三角形的内角和恰好是多边形的内角和. 因此 n 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$.



(第17(2)题)

18. (1) $\angle M = 35^\circ$;

- (2) $\angle M = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$ 是问题的一般化. 证明的思路是: 易证 $\angle BAM + \angle B = \angle BCM + \angle M$, $\angle D + \angle DCM = \angle DAM + \angle M$. 二式相加得 $\angle BAM + \angle B + \angle D + \angle DCM = \angle BCM + \angle M + \angle DAM + \angle M$. 注意到 $\angle BAM = \angle DAM = \frac{1}{2}\angle BAD$, $\angle DCM = \angle BCM = \frac{1}{2}\angle BCD$, 于是 $\angle B + \angle D = \angle M + \angle M$. 化简得 $\angle M = \frac{1}{2}(\angle B + \angle D)$.

此题涉及对关系的认识, 不能就事论事直接解决 $\angle M$ 的度数问题, 而是最好列出两个方程从中解出 $\angle M$, 所以显得比较复杂. 此题对帮助学生认识数学证明的思路和威力有一定好处, 可以当作学有余力的学生的探究性题目.

附录 典型案例评析

平行线的判定（学案）

设计：湖北省宜昌六中 陈志

评析：江苏省教科院 章飞

一、学习目标

1. 了解证明的基本步骤和书写格式.
2. 会根据已学的基本事实或定理来证明两直线平行.

二、学习过程

今天，我们就尝试借助基本事实和已经证明过的定理，证明两直线平行的判别条件！

【第一环节】回忆平行线的判别条件

1. 两直线平行的判别条件有：

(1) 两条直线被第三条直线所截，如果 _____，则两直线平行.

简述为：_____，两直线平行.

(2) 两条直线被第三条直线所截，如果 _____，则两直线平行.

简述为：_____，两直线平行.

(3) 两条直线被第三条直线所截，如果 _____，则两直线平行.

简述为：_____，两直线平行.

2. 在每个判别条件旁边画一个图加以说明.

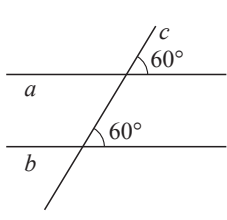
3. 这三个条件中，哪一个是上一课时确认的基本事实？

评析：开门见山点名课题：平行线的判定. 由于六年级下册学生已经学习过平行线的判别条件，而且相对而言，这个判别条件也比较简单，学生遗忘的可能性不大，因此，这里直接提请学生回忆平行线的判别条件. 作为学案，需要尽可能减轻学生的无效劳动，因此，这里以填空的形式，要求学生填写关键词语，一方面可以减轻学生负担，另外也便于师生的检查和后续的调用. 当然，不采用学案的班级，可以直接提问：平行线的判别条件有哪些？分别是什么？

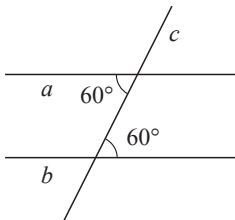
回忆出判别条件之后，要求学生在每个判别条件旁边画一个图加以说明，目的在于加深学生对判别条件的理解. 实际上，对于几何结论，更需要在头脑中形成关于结论的对应图形特征，这样的图形特征既便于记忆，也便于理解. 当然，这一活动也为后续证明做了很好的铺垫.

【第二环节】证明平行线的判定定理

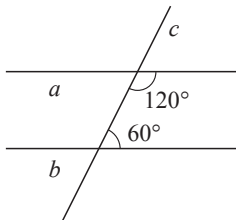
1. 利用基本事实说明下列各组中两条直线是否平行.



(1)



(2)



(3)

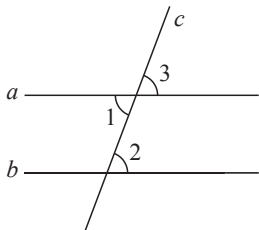
(第1题)

2. 将上面图(2)中的两个 60° 换成其他两个相等的角, 结论还成立吗? 由此你能得到什么结论?

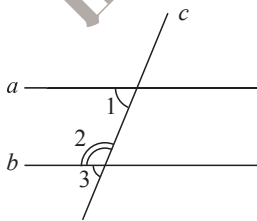
3. 试证明: 两条直线被第三条直线所截, 如果内错角相等, 那么这两条直线平行.

已知: 如图, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a, b 被直线 c 截出的内错角, 且 $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $a \parallel b$.



(第3题)



(第4题)

4. 试证明: 两条直线被第三条直线所截, 如果同旁内角互补, 那么这两条直线平行.

已知: 如图, $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 是直线 a, b 被直线 c 截出的同旁内角, 且 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 互补.

求证: $a \parallel b$.

(你有几种证法?)

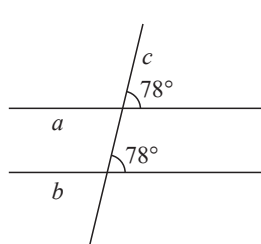
评析: 这个环节要求在已有基本事实的基础上, 证明其他两个判定定理. 如果直接提出这个问题, 可能学生有一定困难, 因此, 这里还是首先从直观的图形特征入手, 要求学生能够结合图象利用基本事实说明两条直线平行, 进而思考换成其他角度这个结论是否正确, 从而感受到另外两个判定定理. 同时, (2)(3) 两个图中 $a \parallel b$ 的说明过程正是一般的判定定理证明过程的具体化, 这样, 就为后面判定定理的证明提供了很好的铺垫. 有了这些铺垫, 具体的证明则完全可以教给学生了, 后面提供了学习链接供学生对照评判.

此外, 对于后一个定理, 由于有了基本事实和前面的定理两个基础, 因此, 可能有多种证法.

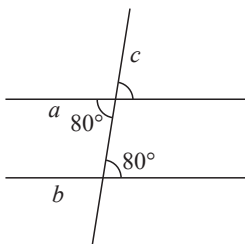
当然, 这是纸质的学案, 因此只能固化一个顺序, 似乎可以先内错角然后是同旁内角, 实际上, 教学中完全可以根据学生的情况, 选择不同的教学顺序.

【第三环节】运用定理解决问题

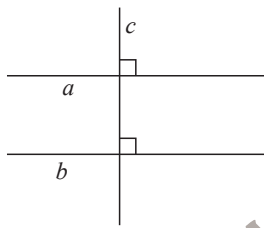
1. 下列各小题中直线 a, b 平行吗? 说说你的理由.



(1)



(2)



(3)

(第1题)

2. 我们曾经用下面的方法作出了平行线, 你能说说其中的道理吗?



(第2题)

3. (1) 试着在一张不规则的四边形纸片上折出平行线, 与同伴进行交流.

(2) 证明折出的两条直线是平行线. (先画出图形, 再写出你的证明过程)

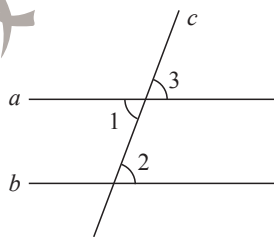
评析: 证明定理之后, 自然是定理的运用巩固了. 但运用巩固时, 一定要注意题目的层次递进和形式多样. 层次递进的题目, 可以让更多学生获得成功的体验; 而多样的形式, 可以激发学生的学习兴趣, 促进学生的有效参与, 提高课堂学习的效益.

这里, 第1题给出了图形特征, 要求学生直接利用判定定理说明, 比较简单; 第2题, 是原来作平行线的具体方法, 学生也比较熟悉, 但要求学生说明这种作法的合理性, 其中虽然有图, 但毕竟是实物图, 需要加以抽象, 另外, 图中的线和角不是显性的, 需要学生自己勾画出来加以运用, 因此, 较第1题稍难, 但毕竟这一活动是学生十分熟悉的, 因此, 相信通过自己的努力和同伴的互助, 能够解决这个问题; 第3题, 要求学生在一张不规则的纸上折出平行线, 并画出相应的图形, 则更为开放. 相信读者不难从这几道题中感受到题目之间的渐次递进和题目形式的多样.

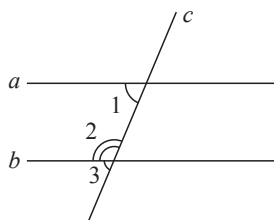
【第四环节】自主反馈 (略)

【学习链接】

- 证明: $\because \angle 1 = \angle 2$ (已知条件),
 $\angle 1 = \angle 3$ (对顶角相等),
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ (等量代换).
 $\therefore a \parallel b$ (同位角相等, 两直线平行).
- 证明: $\because \angle 2 + \angle 3 = 180$,
 又 $\because \angle 1 + \angle 2 = 180$,
 $\therefore \angle 1 = \angle 3$ (同角的补角相等).
 $\therefore a \parallel b$ (同位角相等, 两直线平行).



(第1题)



(第2题)

第九章 概率初步

一、《标准》要求

1. 能通过列表、画树状图等方法列出简单随机事件所有可能的结果，以及指定事件发生的所有可能结果，了解事件的概率.
2. 知道通过大量地重复试验，可以用频率来估计概率.

二、教学目标

1. 经历猜测、试验、收集试验数据、设计试验方案，分析试验结果等活动过程，发展数据分析观念.
2. 理解随机事件的有关概念，能区分确定事件与随机事件，必然事件与不可能事件，并感受随机事件发生的可能性有大有小.
3. 通过试验感受随机事件发生的频率的稳定性，了解事件的概率，体会概率是描述随机现象的数学模型.
4. 了解两类事件（古典概型和可化为古典概型的概型）发生的概率，能进行简单的计算，并能设计符合要求的简单概率模型.
5. 体会随机现象在我们身边大量存在，能初步地用概率的思想解释身边的现象，发展“用数学”的意识与能力.
6. 在探究频率与概率的过程中，进一步体会数学的价值及发展合作意识.

三、设计思路

在现代社会里，人们面临着更多的机会和选择，常常需要在不确定的情境中作出合理的决策. 概率论就是研究随机现象及其规律的数学学科.

在自然界和人类社会中，确定性的现象十分有限，不确定性的现象（也称为随机现象）却是大量存在的，而概率正是对随机现象的数学描述，它能帮助人们作出合理的决策. 需要指出的是，概率并不提供确实无误的结论，这是由不确定现象的本性造成的. 比如，即使告诉你中奖的概率为 $\frac{1}{1000}$ ，但你买 1 000 张奖券却不一定能中奖；又如，明天的降水概率为 10%，后天是 90%，但却有可能事实上明天下了雨，而后天却没有下雨. 许多人会有这样的想法：学习概率有什么用？换句话说，如果我们不能在试验之前预知试验的确切结果，只能知道每个结果发生的概率，那么这有什么意义呢？实际上这里存在着一个错觉或者说偏见，以为不了解试验的确切结果，一切都无意义，其实不然. 设想有两个工厂生产同一种产品，甲厂产品的次品率为 0.001，乙厂产品的次品率为 0.1. 若两个厂的产品在价格等其他方面条件都相同，这时人们将愿意买甲厂的产品而不是乙厂的产品，尽管你可能买到甲厂的次品而买到乙厂的正品. 具体的结果事前无法预料，但人们还是认为买甲厂产品比买乙厂产品更好. 类似地，如果天气说“明天降水概率是 90%”，“带雨具出门”和“不带雨具出门”相比，前者恐怕是更明智的选择，尽管第二天可能根本没下雨. 因此，概率作为一门

重要的数学学科，它与我们所熟悉的代数、几何的主要不同也在于此，即后者往往得到确定性的结论，而前者常常得不到确定性的结论。但是，概率论和确定性的数学学科一样，成为人们不可缺少的武器。认识到概率的思维方式与确定性思维的差异，这就是随机观念。使学生具备随机观念，从而能明智地应付变化和不确定性，这是概率教学的主要目标。

现实生活中存在着大量的随机事件，教科书先以学生喜闻乐见的掷骰子游戏为背景，经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，让学生体验生活中有许多事件的发生是不确定的，加深对确定事件与随机事件，必然事件与不可能事件等概念的理解，并感受随机事件发生的可能性有大有小。同时，初步体会人们一般通过重复多次试验来估计事件发生的可能性大小。

在第二节中，通过抛掷图钉和抛掷均匀的硬币的试验，让学生感受到频率的稳定性，并得出概率的统计定义，即用事件发生的频率的稳定值作为该事件发生的概率。本章内容设计时，先给出概率的统计定义，是基于下面几点考虑：首先，可以更深刻地理解概率的意义。我们说一个事件发生的概率为 30%，它的意义就是在大量的重复试验中，该事件发生的频率稳定在 30%。其次，相对于概率的古典定义，概率的统计定义更具普遍性和一般性。概率的古典定义是在等可能假设下的一种理想模型，事实上，现实世界存在大量的非古典模型，所涉及的事件的概率都不能用古典概率的公式计算，而只要条件允许，我们总可以通过大量的重复试验，用频率来估计它。最后，在用试验的方法探究概率的过程中，可以培养学生的动手能力，处理数据的能力，增强学生的统计意识，培养学生实事求是的态度、勇于探索的精神和交流协作的精神。

用事件发生的频率的稳定值作为该事件发生的概率，虽然具有普遍性，但这种方法需要进行大量的重复试验，而且往往得到的只是概率的估计值。在第三节中，通过对摸到红球的概率的讨论，对一类事件（古典概型）发生的概率进行简单的理论计算。通过对停留在黑砖上的概率的讨论，对另一类事件（几何概型）发生的概率进行简单的理论计算，从而加深对概率意义的理解。

四、课时安排建议

1 感受可能性	1 课时
2 频率的稳定性	2 课时
3 等可能事件的概率	4 课时
回顾与思考	1 课时

五、教学建议

1. 注重学生数据分析观念的培养与发展。对于随机现象，学生一般都有一些朴素的想法，这些想法，有的是正确的，有的是错误的，在教学过程中应及时了解并加以引导和纠正。一方面，要让学生亲自经历对随机现象的探索过程，亲自经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，以获得事件发生的概率；另一方面，引导学生从现实生活

中熟悉和感兴趣的问题中体会随机事件发生的概率. 了解随机现象的特点, 了解概率的意义, 树立一定的随机观念, 是教学的重点和难点.

2. 注重引导学生积极参与试验过程, 亲自动手进行试验, 经历猜测、试验、收集试验数据、设计试验、分析试验结果等活动过程, 并在活动过程中体验如何与他人合作交流.

3. 注意从不同角度了解概率意义(统计定义, 古典概型), 体会模型思想. 如古典概型就是一个理想化的概率模型, 只要符合古典概型的特征, 在计算时就可以利用古典概型的概率计算公式进行.

4. 引导学生从身边的点点滴滴(如, 天气预报中的降水概率, 商场摸奖时中奖的概率等等)去观察和体会随机现象及其规律性, 通过身边大量的实例让学生对概率形成正确的认识, 注重让学生了解概率在日常生活和生产实践中的应用, 进一步体会“数学就在我们身边”, 发展“用数学”的意识与能力.

六、评价建议

1. 注重考查学生在活动过程中表现出来的直观经验的合理性和局限性.

已有的生活经验是学生进一步学习的重要基础, 教师要及时了解并加以记录. 教学时可以在开始试验前, 请学生猜测试验的结果, 并说明理由. 在试验过程中及时了解学生思想的变化. 在试验结束并进行理论分析后, 再请学生谈谈自己的看法, 由此可以了解到教学是否帮助学生改正一些错误认识, 发展了他们正确的随机观念, 以便调整教学.

2. 考查学生是否能够进行概率的计算是本章的一个内容, 但建议更注重评价学生对不确定事件及其概率的理解.

3. 注重评价学生能否积极地参与试验, 在试验中是否有科学的态度, 能否积极地思考, 能否与他人良好地合作交流, 能否从试验数据中获得规律. 教师可以鼓励学生建立成长记录, 记录自己曾经存在的错误经验、通过学习获得的对概率的理解、需要进一步澄清的观念等.

主题图选用了生活中学生比较熟悉的一些随机现象作为素材，目的是体现随机现象的大量存在，从而认识到研究随机现象是十分必要的. 主题图的设计意图在于激发学生的学习欲望，使学生带着问题开始本章的学习，进而达到对相关内容更加深刻的认识.

第九章 概率初步

随机地经过一个路口，遇到红灯的可能性大还是遇到绿灯的可能性大？

你会用试验的方法估计一个事件发生的可能性大小吗？

在本章中，我们将进一步学习不确定事件及其发生可能性的大小，即随机事件及其概率. 掌握概率的知识和方法能帮助我们更好地作出决策.



学习目标

- 感受生活中的随机现象，并体会随机事件发生的可能性大小
- 通过试验感受随机事件发生的频率的稳定性，理解概率的意义
- 能求一些简单随机事件发生的概率，并能设计符合要求的简单概率试验
- 体会概率是描述随机现象的数学模型，发展数据分析观念

1 感受可能性

^[1] (1) 随意投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数会是 10 吗?

(2) 随意投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数一定不超过 6 吗?

(3) 随意投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数一定是 1 吗?



在一定条件下, 有些事情我们事先能肯定它一定发生, 这些事情称为**必然事件**. 例如, 在掷骰子的试验中, “投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数不超过 6” 就是一个必然事件. 有些事情我们事先能肯定它一定不会发生, 这些事情称为**不可能事件**. 例如, “投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数是 10” 就是一个不可能事件. 必然事件与不可能事件统称为**确定事件**.

但是, 也有许多事情我们事先无法肯定它会不会发生, 这些事情称为**不确定事件**, 也称为**随机事件**. 例如, “投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数是 1” 就是一个不确定事件.

议一议

举出生活中的几个确定事件和不确定事件.

做一做

利用均匀的骰子和同桌做游戏, 规则如下:

(1) 两人同时做游戏, 各自投掷一枚骰子, 每人可以只投掷一次骰子, 也可以连续地投掷几次骰子;

(2) 当掷出的点数和不超过 10 时, 如果决定停止投掷, 那么你的得分就

投掷骰子
要注意什么?

对于确定事件与随机事件, 必然事件与不可能事件的概念, 教科书只是给出一个描述性的定义, 教学时不必让学生死记硬背, 只要学生能用自己的语言描述或能举例说明即可. 关键是对这些概念的理解, 并在以后的学习中, 逐步加深对它们的理解.

教师应鼓励学生再举出生活中的一些确定事件和不确定事件的例子, 如掷硬币、摸球等, 以体会确定事件和不确定事件的区别.

议一议

目的是使学生通过举例, 理解确定事件和不确定事件的概念.

教学目标

1. 通过掷骰子活动, 经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等过程, 体会数据的随机性.

2. 理解随机事件概念, 能区分确定事件与不确定事件, 并感受不确定事件发生的可能性有大有小.

在小学阶段, 学生对确定事件与不确定事件等概念已经有了初步的体会, 所以, 教科书只是用一个简单的掷骰子的场景来引出这些概念, 然后, 通过一个游戏让学生体会到不确定事件发生的可能性是有大有小.

^[1] 在教学过程中, 教师应该先鼓励学生从已有的经验出发, 猜测这些问题的答案, 并在全班进行讨论. 然后, 应该让学生实际做一做, 体会事件发生的确定与不确定, 必然与不可能.

做一做

教科书提供了一个有趣的游戏，目的是使学生体会到随机事件发生的可能性是有大有小的.

在这个游戏中，学生将进一步体会到随机事件的特点，了解到随机事件发生的可能性有大有小，同时，初步体会人们一般通过重复多次试验来估计事件发生的可能性大小，并根据随机事件发生的可能性大小，帮助我们作出合理的决策. 在教学中，应该鼓励学生进行充分的试验，并交流试验中积累的经验.

一般来说，当前面掷出的点数和不超过4 时，应该继续投掷；当前面掷出的点数和在5 7 之间时，可以选择继续投掷；当前面掷出的点数和在7 9 之间时，可以选择停止投掷；当前面掷出的点数和为10 时，应该停止投掷. 当然，如果你在后面投掷，还要视前面投掷的人的结果来决定是否继续投掷.

在游戏中，有些学生会初步体会到掷出1 6 的每一个点数的可能性都是相同的，但教师在此无须刻意指出.

是所掷出的点数和；当掷出的点数和超过 10 时，必须停止投掷，并且你的得分为 0；

(3) 比较两人的得分，谁的大谁就获胜.

多做几次上面的游戏，并将最终结果填入下表：

		第 1 次点数	第 2 次点数	第 3 次点数	...	得分
第一次游戏	甲				...	
	乙				...	
第二次游戏	甲				...	
	乙				...	
第三次游戏	甲				...	
	乙				...	
...	...	...	...	...	...	...

在做游戏的过程中，你是如何决定是继续投掷骰子还是停止投掷骰子的？与同伴进行交流.

议一议

在做游戏的过程中，如果前面掷出的点数和已经是 5，你是决定继续投掷还是决定停止投掷？如果掷出的点数和已经是 9 呢？



掷出的点数和已经是 5，根据游戏规则，再掷一次，如果掷出的点数不是 6，那么我的得分就会增加，而掷出的点数不是 6 的可能性要比是 6 的可能性大，所以我决定继续投掷.



掷出的点数和已经是 9，再掷一次，如果掷出的点数不是 1，那么我的得分就会变成 0，而掷出的点数是 1 的可能性要比不是 1 的可能性小，所以我决定停止投掷.

你认为小明和小颖的说法有道理吗？

5 后就停止投掷或前面掷出的点数和已经是 9 还继续投掷，小明和小颖的做法无疑是明智的. 认识到概率的思维方式与确定性思维的差异，发展学生的随机观念，这是概率教学的主要目标.

议一议

可以先根据生活经验猜测“掷出的点数是 6”和“掷出的点数不是 6”的可能性哪个大，然后根据试验结果，检验猜测的结果与试验的数据是否相符.

小明和小颖的说法是有一定道理的. 需要指出的是，概率并不提供确实无误的结论，但相比较于前面掷出的点数和是

一般地, 不确定事件发生的可能性是有大有小的.

《随堂练习》

- (1) 确定事件 (必然事件);
(2) 不确定事件.
- 由于座位号是 2 的倍数的电影票比座位号是 5 的倍数的电影票要多, 所以, 小明任意买一张电影票, 座位号是 2 的倍数的可能性要比座位号是 5 的倍数的可能性大.

《习题 9.1》

- (1) 必然事件;
(2) 不确定事件;
(3) 不确定事件;
(4) 不可能事件.
学生只要能用自己的语言说明理由即可.
- 摸到红球的可能性大, 因为袋中红球比白球的个数多.
- 由于白色区域的面积要比红色区域和蓝色区域的面积都要大, 所以, 转动转盘, 当转盘停止时, 指针落在白色区域的可能性最大.

《想一想》

生活中有许多不确定事件, 它们发生的可能性有大有小, 你能举出几个例子吗?

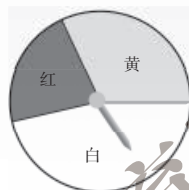
《随堂练习》

- 下列事件中, 哪些是确定事件? 哪些是不确定事件?
(1) 将油滴入水中, 油会浮在水面上;
(2) 任意投掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数是奇数.
- 小明任意买一张电影票, 座位号是 2 的倍数与座位号是 5 的倍数的可能性哪个大?

《习题 9.1》

《知识技能》

- 下列事件中, 哪些是确定事件? 哪些是不确定事件?
(1) 抛出的篮球会下落;
(2) 打开电视机, 正在播动画片;
(3) 任意买一张电影票, 座位号是 2 的倍数;
(4) 早上的太阳从西方升起.
- 一个袋中装有 8 个红球, 2 个白球, 每个球除颜色外都相同. 任意摸出一个球, 摸到哪种颜色球的可能性大? 说说你的理由.
- 下图是一个可以自由转动的转盘, 转动转盘, 当转盘停止时, 指针落在哪个区域的可能性大? 先猜一猜, 再试一试.



(第 3 题)

数学理解

4. 下图表示各袋中球的情况, 每个球除颜色外都相同. 任意摸出一个球, 请你按照摸到红球的可能性由大到小进行排列.



(第4题)

问题解决

5. 如图是一个可以自由转动的转盘, 利用这个转盘与同桌做下面的游戏:



(第5题)

- (1) 自由转动转盘, 每人分别将转出的数填入四个方格 $\square\square\square\square$ 中的任意一个;
- (2) 继续转动转盘, 每人再将转出的数填入各自剩下的任意一个方格中;
- (3) 各转动四次转盘后, 每人得到一个“四位数”;
- (4) 比较两人得到的“四位数”, 谁的大谁就获胜.

多做几次上面的游戏. 在做游戏的过程中, 你有哪些经验?

4. 按照摸到红球的可能性由大到小进行排列为: ⑤ ④ ③

② ①.

5. 略.

教学目标

1. 通过抛图钉和掷硬币活动, 经历猜测、试验、收集试验数据、分析试验结果等过程, 初步体会频率与概率的关系.

2. 通过试验, 理解在试验次数很大时, 事件发生的频率具有稳定性.

3. 了解概率的意义, 并能根据某些事件发生的频率来估计此事件发生的概率.

教科书从两个试验入手, 使学生经历“猜测—试验和收集试验数据—分析试验结果—验证猜测”的过程, 初步了解在试验次数很大时, 事件发生的频率具有稳定性.

教科书提供“掷图钉”和“掷硬币”两个试验.“掷图钉”的试验没有理论概率, 而“掷硬币”的试验有理论概率, 而且先呈现“掷图钉”的试验是有一定用意的. 首先可以纠正有些学生的一些错误观念.

如, 一次试验可能出现两种结果, 那么这两种结果发生的可能性一定是相同的, 都是 $\frac{1}{2}$; 又如, 所有事件的概率都可以通过理论计算得到等. 其次, 可以告诉学生, 不论试验有没有理论概率, 事件发生的频率都具有稳定性, 从而用事件发生的频率来估计该事件发生的概率, 具有普遍性.

教科书从一个日常生活中的常见问题入手, 使学生经历“猜测—试验和收集试验数据—分析试验结果—验证猜测”的过程, 初步了解在试验次数很大时, 事件发生的频率会在一个常数附近摆动, 即事件发生的频率具有稳定性.

操作上, 应注意下面几点:

1. 抛掷图钉时, 要特别提醒学生注意安全;

2 频率的稳定性

在地上抛掷一枚图钉, 会出现两种情况:



钉尖朝上



钉尖朝下

你认为钉尖朝上和钉尖朝下的可能性一样大吗?



直觉告诉我, 任意掷一枚图钉, 钉尖朝上和钉尖朝下的可能性是不相同的.

我的直觉跟你的一样, 但我不知道对不对.



不妨让我们用试验来验证吧!

(1) 两人一组做 20 次掷图钉的游戏, 并将数据记录在下表中:

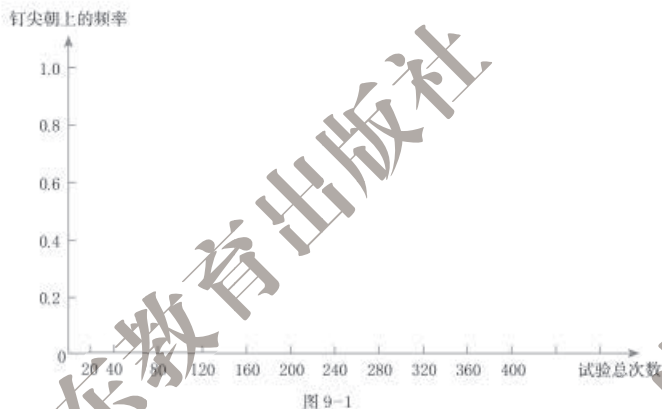
试验总次数	
钉尖朝上的次数	
钉尖朝下的次数	
钉尖朝上的频率 ($\frac{\text{钉尖朝上的次数}}{\text{试验总次数}}$)	
钉尖朝下的频率 ($\frac{\text{钉尖朝下的次数}}{\text{试验总次数}}$)	

在 n 次重复试验中, 不确定事件 A 发生了 m 次, 则比值 $\frac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率.

(2) 累计全班同学的试验结果, 并将试验数据汇总填入下表:

试验总次数 n	20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400
钉尖朝上的次数 m											
钉尖朝上的频率 $\frac{m}{n}$											

(3) 根据上表, 完成下面的折线统计图:



(4) 观察上面的折线统计图, 钉尖朝上的频率的变化有什么规律?

在试验次数很大时, 钉尖朝上的频率会在一个常数附近摆动, 即钉尖朝上的频率具有稳定性.

议一议

(1) 通过上面的试验, 你认为钉尖朝上和钉尖朝下的可能性一样大吗? 你是怎么想的?

(2) 小军与小凡一起做了 1 000 次掷图钉的试验, 其中有 640 次钉尖朝上, 据此, 他们认为钉尖朝上的可能性比钉尖朝下的可能性大. 你同意他们的观点吗?

只要能用自己的语言描述即可.

(2) 小凡他们的说法是有一定道理的. 在试验次数很大 (1 000 次) 的情况下, 有 640 次钉尖朝上, 360 次钉尖朝下, 我们有理由认为钉尖朝上的可能性比钉尖朝下的可能性大.

2. 抛掷图钉时, 要从一定的高度任意地抛出, 以保证试验的随机性;

3. 引导学生汇总试验数据并完成表格, 再根据表格中的数据完成相应的折线统计图.

观察折线统计图, 我们会发现: 当试验的次数较小时, 折线上下摆动的幅度可能比较大, 但随着试验次数的增加, 折线摆动的幅度逐渐变小, 在试验次数很大时, 会稳定在一个常数的附近. 学生只要能用自己的语言描述即可.

议一议

(1) 这个办法一般是不公平的, 至于对哪一方有利, 则应根据试验数据. 学生通过上面的试验, 感受到频率的稳定性, 自然会想到用频率所稳定的值来表示钉尖朝上和钉尖朝下的可能性大小, 从而为下一课时引出概率的定义做铺垫. 在此, 教师不用过分强调, 学生

《随堂练习》

- (1) 见本页下表;
- (2) 略;
- (3) 频率具有稳定性.

《习题9.2》

- (1) 见本页下表;
 - (2) 略;
 - (3) 在随机抽取的产品数很大时, 合格率会稳定在一个常数的附近.
- 可以仿照抛图钉的试验, 一般来说, 盖面朝上和盖面朝下的可能性不一样大.

《随堂练习》

某射击运动员在同一条件下进行射击, 结果如下表所示:

射击总次数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
击中靶心的次数 m	9	16	41	88	168	429	861
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$							

- (1) 完成上表;
- (2) 根据上表, 画出该运动员击中靶心的频率的折线统计图;
- (3) 观察画出的折线统计图, 该运动员击中靶心的频率的变化有什么规律?

《习题 9.2》

《知识技能》

1. 对某批产品的质量进行随机抽查, 结果如下表所示:

随机抽取的产品数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
合格的产品数 m	9	19	47	93	187	467	935
合格率 $\frac{m}{n}$							

- (1) 完成上表;
- (2) 根据上表, 画出产品合格率变化的折线统计图;
- (3) 观察上面的折线统计图, 产品合格率的变化有什么规律?

《数学理解》

2. 抛掷一个如图所示的瓶盖, 盖面朝上和盖面朝下的可能性是否一样大? 怎样才能验证自己结论的正确性?



盖面朝上



盖面朝下

射击总次数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
击中靶心的次数 m	9	16	41	88	168	429	861
击中靶心的频率 $\frac{m}{n}$	0.9	0.8	0.82	0.88	0.84	0.858	0.861

随机抽取的产品数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
合格的产品数 m	9	19	47	93	187	467	935
合格率 $\frac{m}{n}$	0.9	0.95	0.94	0.93	0.935	0.934	0.935

[1] 抛掷一枚均匀的硬币，硬币落下后，会出现两种情况：



正面朝上



正面朝下

你认为正面朝上和正面朝下的可能性相同吗？

做一做

(1) 同桌两人做 20 次掷硬币的游戏，并将数据记录在下表中：

试验总次数	
正面朝上的次数	
正面朝下的次数	
正面朝上的频率	
正面朝下的频率	

(2) 累计全班同学的试验结果，并将试验数据汇总填入下表：

试验总次数	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
正面朝上的次数										
正面朝下的次数										
正面朝上的频率										
正面朝下的频率										

(3) 根据上表，完成下面的折线统计图：

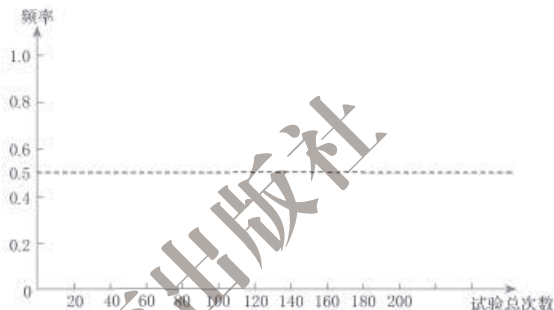


图 9-2

做一做

操作上，应注意下面几点：

(1) 抛掷硬币时，要从一定的高度任意地抛出，以保证试验的随机性；

(2) 引导学生汇总试验数据并完成表格，再根据表格中的数据完成相应的折线统计图。在作折线统计图时，建议画出两条线，一条是正面朝上的频率分布的折线统计图，另一条是正面朝下的频率分布的折线统计图，以便让学生发现正面朝上的频率和正面朝下的频率都稳定到 $\frac{1}{2}$ ，为得出这两个事件的等可能事件做铺垫。

[1] 让学生再次经历“猜测—试验和收集试验数据—分析试验结果—验证猜测”的过程，学生可能从日常生活经验（如足球比赛中，裁判通常用掷一枚均匀的硬币的方法来决定双方的比赛场地）猜测掷一枚均匀的硬币，正面朝上和正面朝下的可能性是相同的，这个试验的目的是：

(1) 了解在试验次数很大时，事件发生的频率具有稳定性；

(2) 使学生体会在“掷硬币”的试验中，正面朝上和正面朝下的可能性是相同的，为后面的古典概型做准备；

(3) 可以让学生思考：为什么掷一枚图钉，钉尖朝上和钉尖朝下的可能性是不相同的，而掷一枚均匀的硬币，正面朝上和正面朝下的可能性是相同的？

[1] 完成折线统计图, 我们观察会发现: 当试验的次数较小时, 折线上下摆动的幅度可能比较大, 但随着试验次数的增加, 折线摆动的幅度逐渐变小, 在试验次数很大时, 无论是正面朝上的频率还是正面朝下的频率, 都会稳定在一个常数 ($\frac{1}{2}$) 的附近. 即事件发生的频率具有稳定性, 并且正面朝上的频率和正面朝下的频率稳定的值相等, 它们发生的可能性大致相等, 学生只要能用自己的语言描述即可.

[2] 第一个从理论上证明频率具有稳定性这一规律的是数学家雅科布·伯努利 (Jakob Bernoulli, 1654—1705), 他证明了著名的伯努利大数定理: 在 n 次独立重复试验中, 随机事件 A 发生了 m 次, p 是事件 A 在每次试验中发生的概率, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

伯努利大数定理以严格的数学形式表达了频率的稳定性, 即当试验次数 n 很大时, 事件发生的频率与概率有较大偏差的可能性很小. 根据实际推断原理, 在实际应用中, 当试验次数 n 很大时, 就可以用事件发生的频率来估计事件发生的概率.

[3] 事件 A 发生的概率 $P(A)$, 刻画了事件 A 发生的可能性的. $P(A)$ 越大, 事件 A 发生的可能性也越大, $P(A)$ 越小, 事件 A 发生的可能性也越小.

频率与概率既有密切的联系, 又有本质的差别. 概率是随机事件的本质属性, 而频率是随机事件在试验中的统计结果.

(4) 观察上面的折线统计图, 你发现了什么规律? [1]

(5) 下表列出了一些历史上的数学家所做的掷硬币试验的数据:

试验者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 m	正面朝上的频率 $\frac{m}{n}$
布丰	4 040	2 048	0.506 9
德·摩根	4 092	2 048	0.500 5
费勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

表中的数据支持你发现的规律吗?

无论是抛掷均匀的硬币还是抛掷图钉, 在试验次数很大时, 正面朝上 (钉尖朝上) 的频率都会在一个常数附近摆动, 这个性质称为频率的稳定性. [2]

由于事件 A 发生的频率表示该事件发生的频繁程度, 频率越大, 事件 A 发生越频繁, 这就意味着事件 A 发生的可能性也越大.

我们把刻画事件 A 发生的可能性大小的数值, 叫做事件 A 发生的概率 (probability), 记为 $P(A)$. [3]

一般地, 大量重复的试验中, 我们常用不确定事件 A 发生的频率来估计事件 A 发生的概率.

想一想

事件 A 发生的概率 $P(A)$ 的取值范围是什么? 必然事件发生的概率是多少? 不可能事件发生的概率是多少?

必然事件发生的概率为 1; 不可能事件发生的概率为 0; 不确定事件 A 发生的概率 $P(A)$ 是 0 与 1 之间的一个常数.

想一想

因为在 n 次重复试验中,事件 A 发生的次数 m 满足 $0 \leq m \leq n$,所以 $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$,从而可知频率 $\frac{m}{n}$ 所稳定到的常数 p 也满足 $0 \leq p \leq 1$.因此

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

若 A 是必然事件,则事件 A 发生的次数 $m = n$,所以 $\frac{m}{n} = 1$,从而可知频率 $\frac{m}{n}$ 所稳定到的常数 p 也一定是1.因此 $P(A) = 1$,即必然事件发生的概率为1.

若 A 是不可能事件,则事件 A 发生的次数 $m = 0$,所以 $\frac{m}{n} = 0$,从而可知频率 $\frac{m}{n}$ 所稳定到的常数 p 也一定是0.因此 $P(A) = 0$,即不可能事件发生的概率为0.

议一议

学生通过上面试验的图表数据和历史上的数学家所做的掷硬币试验的数据,一般能初步体会到正面朝上的概率和正面朝下的概率都为 $\frac{1}{2}$, 它们是相等的. 如果学生由于试验数据的差别而不认同这两个事件的等可能性, 教师可以根据他们的生活经验使其认同.

教师可以向学生提问: 如果掷一枚不均匀的硬币, 正面朝上和正面朝下发生的可能性是否相等?

随堂练习

1. (1) 因为试验的次数不多(只有 5 次), 此时用频率来估计概率, 其误差一般较大, 所以, 认为正面朝上的可能性大约为 $\frac{3}{5}$, 朝下的可能性约为 $\frac{2}{5}$ 是不太合适的. 由于硬币是均匀的, 所以再多做一些试验, 正面朝上的频率和正面朝下的频率一般都会稳定地在 $\frac{1}{2}$ 的附近.

2. 概率是针对大量试验而言的, 大量试验中所存在的规律并不一定在一次试验中存在, 概率是 $\frac{1}{2}$, 不能保证在 2 次试验中恰好发生 1 次, 也不能保证在 100 次试验中恰好发生 50 次, 只是当试验的次数越来越大时, 正面朝上的频率会稳定到 $\frac{1}{2}$.

虽然多次试验的频率渐趋稳定于其理论概率, 但也不排斥无论做多少次试验, 试验概率仍然是理论概率的一个近似值, 两者存在着一定的偏差, 而且偏差的存在是正常的、经常的. 事实上, 做 100 次掷币试验恰好 50 次正面朝上的概率大约只有 8%.

读一读

主要介绍有关概率的发展简史, 旨在让学生了解概率的来源和发展过程.

议一议

由上面的试验, 请你估计抛掷一枚均匀的硬币, 正面朝上和正面朝下的概率分别是多少. 它们相等吗?

随堂练习

1. 小凡做了 5 次抛掷均匀硬币的试验, 其中有 3 次正面朝上, 2 次正面朝下, 他认为正面朝上的概率约为 $\frac{3}{5}$, 正面朝下的概率约为 $\frac{2}{5}$. 你同意他的观点吗? 你认为他再多做一些试验, 结果还是这样吗?
2. 抛掷一枚均匀的硬币, 正面朝上的概率为 $\frac{1}{2}$. 那么, 抛掷 100 次硬币, 你能保证恰好 50 次正面朝上吗? 与同伴交流.

读一读

概率的由来

概率主要研究不确定现象, 它起源于博弈问题. 15~16 世纪, 意大利数学家们曾讨论过“如果两人赌博提前结束, 该如何分配赌金”等问题. 比如, 两个人做掷硬币游戏, 掷出正面甲得 1 分, 掷出反面乙得 1 分, 先得到 10 分的人赢得一个大蛋糕. 如果游戏因故中途结束, 此时甲得了 8 分, 乙得了 7 分, 那么他们该如何分配这个蛋糕?

为了回答类似上述问题, 人们对不确定现象进行了大量的研究. 前面已经列举了历史上一些数学家所做的掷硬币试验的数据.

对不确定现象的研究, 最终导致了概率论与数理统计这门学科的出现. 它自产生之日起, 就与人们的实际生活有着紧密的联系, 并且解决了许多科技发展中的问题. 正因为如此, 这门学科有着很强的生命力和广阔的发展前景.



习题 9.3

知识技能

1. 某种麦粒在相同条件下的发芽试验, 结果如下表所示:

试验的麦粒数 n	100	200	500	1 000	2 000	5 000
发芽的粒数 m	94	191	473	954	1 906	4 748
发芽的频率 $\frac{m}{n}$						

- (1) 完成上表;
- (2) 画出麦粒发芽频率的折线统计图;
- (3) 任取一粒麦粒, 估计它能发芽的概率.

2. 对某批乒乓球的质量进行随机抽查, 结果如下表所示:

随机抽取的乒乓球数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
优等品数 m	7	16	43	81	164	414	825
优等品率 $\frac{m}{n}$							

- (1) 完成上表;
- (2) 根据上表, 在这批乒乓球中任取一个, 它为优等品的概率大约是多少?
- (3) 如果重新再抽取 1 000 个乒乓球进行质量检查, 对比上表记录下数据, 两表的结果会一样吗? 为什么?

数学理解

3. 掷一枚均匀的骰子.

- (1) 会出现哪些可能的结果?
- (2) 掷出的点数为 1 与掷出的点数为 2 的可能性相同吗? 掷出的点数为 1 与掷出的点数为 3 的可能性相同吗?
- (3) 每个结果出现的可能性相同吗? 你是怎样做的?

应鼓励学生具体做一做, 且可以让学生探究每种结果出现的可能性相同的原因, 为下一节古典概率的计算打好基础.

试验的麦粒数 n	100	200	500	1 000	2 000	5 000
发芽的粒数 m	94	191	473	954	1 906	4 748
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	0.94	0.955	0.946	0.954	0.953	0.949 6

随机抽取的乒乓球数 n	10	20	50	100	200	500	1 000
优等品数 m	7	16	43	81	164	414	825
优等品率 $\frac{m}{n}$	0.7	0.8	0.86	0.81	0.82	0.828	0.825

习题 9.3

1. (1) 见本页下表;
(2) 略;
(3) 麦粒能发芽的概率大约为 0.95.
2. (1) 见本页下表;
(2) 任取一个乒乓球, 它为优等品的概率大约是 0.825;
(3) 因为随机事件在一次试验中发生与否是不确定的, 所以如果再抽取 1 000 个乒乓球进行质量检查, 记录下来的数据一般是不同的.
3. (1) 掷一枚均匀的骰子, 所有可能的结果有 6 种: 掷出的点数分别是 1, 2, 3, 4, 5, 6.
(2) 掷出的点数为 1 与掷出的点数为 2 的可能性相同; 掷出的点数为 1 与掷出的点数为 3 的可能性相同.
(3) 每种结果出现的可能性相同.

教学目标

1. 经历“提出问题—猜想—思考交流—抽象概括—解决问题”的过程，了解古典概型的特点，了解可化为古典概型的几何概型的特点，会根据试验结果的对称性或均衡性判断试验结果是否具有等可能性.

2. 掌握古典概型及可化为古典概型的几何概型的概率计算方法.

3. 能设计符合要求的简单概率模型，初步体会概率是描述不确定现象的数学模型.

用事件发生的频率来估计该事件发生的概率，虽然具有普遍性，但这种方法需要进行大量的重复试验，而且得到的往往只是概率的估计值，所以教科书接着讨论了古典概型和可化为古典概型的几何概型，它们的概率可以通过计算得到.

本节分为4课时. 前两课时从具体地摸球游戏出发，让学生了解古典概型的特点，给出古典概型的概率计算公式，并从概率的意义来理解游戏的公平性，最后进行反向设计.

后两课时通过具体实例，让学生了解可化为古典概型的几何概型的特点和概率计算，并设计符合要求的简单概率模型.

议一议

1. (1) 会出现摸到1号球、摸到2号球、摸到3号球、摸到4号球、摸到5号球这5种可能的结果.

(2) 每个结果出现的可能性都相同. 由于一共有5种等可能性的结果，所以它们发生的概率都是 $\frac{1}{5}$.

3 等可能事件的概率

前面我们用事件发生的频率来估计该事件发生的概率，但得到的往往只是概率的估计值. 那么，还有没有其他求概率的方法呢？

议一议

1. 一个袋中装有5个球，分别标有1, 2, 3, 4, 5这五个号码，这些球除号码外都相同，搅匀后任意摸出一个球.

(1) 会出现哪些可能的结果？

(2) 每个结果出现的可能性相同吗？猜一猜它们的概率分别是多少.

2. 前面我们提到的抛硬币、掷骰子和摸球的游戏有什么共同的特点？

设一个试验的所有可能的结果有 n 个，每次试验有且只有其中的一个结果出现. 如果每个结果出现的可能性相同，那么我们就称这个试验的结果是等可能的.

想一想

你能找一些结果是等可能的试验吗？

一般地，如果一个试验有 n 个等可能的结果，事件 A 包含其中的 m 个结果，那么事件 A 发生的概率为： $P(A) = \frac{m}{n}$.^[1]

例1 任意掷一枚均匀的骰子.

(1) 掷出的点数大于4的概率是多少？

(2) 掷出的点数是偶数的概率是多少？

解：任意掷一枚均匀的骰子，所有可能的结果有6种：掷出的点数分别是

在前面学习的基础上,要求学生不做试验,直接根据随机试验结果的对称性或均衡性判断试验结果具有等可能性.

2. 可以引导学生抽象概括出古典概型的共同的特点: 所有可能的结果有有限个(有限性), 每个结果出现的可能性(概率)相同(等可能性).

一个试验是否为古典概型, 关键就是看它是否同时具备上述两个基本特点, 两者缺一不可.

古典概型在概率论发展初期是主要的研究对象, 它有着直观、容易理解的特点, 并有着广泛的应用.

“等可能性”是一种理想状态, 是一种假设, 在教学时要求学生不要钻牛角尖, 要避免与学生“抬杠”, 并要求学生能根据随机试验结果的对称性或均衡性判断试验结果是否具有等可能性. 如掷一枚均匀的硬币, 它是一个几何对称体, 其结构均衡, 正面朝上和正面朝下发生的“机会”相同, 所以它们发生的可能性相等. 而掷一枚图钉, 它不是一个几何对称体, 其结构不均衡, 钉尖朝上和钉尖朝下发生的“机会”不相同, 所以它们发生的可能性一般是不相等的.

想一想

如掷硬币、掷骰子、摸球、摸牌等是等可能的试验, 教师还可以举一些不是等可能的试验, 如射击试验中的“中靶”与“脱靶”, 发芽试验中的“发芽”与“不发芽”等, 目的是让学生能根据古典概型的两个基本特点来判断试验是否为等可能的试验, 特别是能根据随机试验结果的对称性或均衡性判断试验结果是否具有等可能性.

^[1] 这是古典概型的概率计算公式, 在用此公式计算概率时, 首先, 应判断试验为古典试验, 即具有古典概型的两个基本特点: 有限性和等可能性, 两者缺一不可. 其次, 计算时关键是计算试验中所有等可能的结果总数和所求事件中可能出现的结果数, 为此, 我们常用列举法.

在本章中, 有关古典概率的计算, 只涉及一步概率.

例 1

在用古典概型的概率计算公式计算概率时, 关键是计算试验中所有等可能的结果总数和所求事件中可能出现的结果数, 本题所用的方法是列举法, 这种方法也是现阶段的常用方法.

^[1] 这是一个开放性的问题，如可以求：掷出的点数小于 5 的概率；掷出的点数是 3 的倍数的概率；掷出的点数不是 6 的概率等等，学生的答案只要合理即可。

《《》》 随堂练习

1. 抽到大王的概率是 $\frac{1}{54}$ ，抽

到 3 的概率是 $\frac{2}{27}$ ，抽到方

块的概率是 $\frac{13}{54}$ 。

显然抽到大王的概率比抽到 3 的概率小，所以打牌的时候摸到大王的机会比摸到 3 的机会小。

2. $\frac{1}{4}$ 。

1, 2, 3, 4, 5, 6. 因为骰子是均匀的，所以每种结果出现的可能性相等。

(1) 掷出的点数大于 4 的结果只有 2 种：掷出的点数分别是 5, 6，所以

$$P(\text{掷出的点数大于 } 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

(2) 掷出的点数是偶数的结果有 3 种：掷出的点数分别是 2, 4, 6，所以

$$P(\text{掷出的点数是偶数}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

你还能求哪些事件的概率？^[1]

《《》》 随堂练习

1. 一副扑克牌，任意抽取其中的一张，抽到大王的概率是多少？抽到 3 的概率是多少？抽到方块的概率是多少？

请你解释一下：打牌的时候，你摸到大王的机会比摸到 3 的机会小。

2. 一道单项选择题有 A, B, C, D 四个备选答案，当你不会做的时候，从中随机地选一个答案，你答对的概率为多少？

《《》》 习题 9.4

《《》》 知识技能

1. 将 A, B, C, D, E 这五个字母分别写在 5 张同样的纸条上，并将这些纸条放在一个盒子中。搅匀后从中任意摸出一张，会出现哪些可能的结果？它们是等可能的吗？

2. 任意掷一枚均匀的骰子。

(1) 掷出的点数小于 4 的概率是多少？

(2) 掷出的点数是奇数的概率是多少？

(3) 掷出的点数是 7 的概率是多少？

(4) 掷出的点数小于 7 的概率是多少？

3. 有 7 张纸签，分别标有数字 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5，从中随机地抽出一张，求：

(1) 抽出标有数字 3 的纸签的概率；

(2) 抽出标有数字 1 的纸签的概率；

(3) 抽出标有数字为奇数的纸签的概率。

《《》》 问题解决

4. 小明所在的班有 40 名同学，从中选出一名同学为家长会做准备工作。请你设计一种方案，使每一名同学被选中的概率都相同。

《《》》 习题 9.4

1. 会出现摸到写有字母 A 的纸条、写有字母 B 的纸条、写有字母 C 的纸条、写有字母 D 的纸条、写有字母 E 的纸条这 5 种可能的结果，它们是等可能的。

2. (1) $\frac{1}{2}$ ；(2) $\frac{1}{2}$ ；(3) 0；(4) 1。

3. (1) $\frac{1}{7}$ ；(2) $\frac{2}{7}$ ；(3) $\frac{4}{7}$ 。

4. 方法很多，如将 40 名同学的名字分别写在 40 张纸签上，随机抽取一张，抽取写有谁的名字的签就选中谁。学生的方法只要合理即可。

议一议

1. 一个袋中装有 2 个红球和 3 个白球, 每个球除颜色外都相同, 任意摸出一个球, 摸到红球的概率是多少?



摸出的球不是红球就是白球, 所以摸到红球和摸到白球的可能性相同, 也就是, $P(\text{摸到红球}) = \frac{1}{2}$.



红球有 2 个, 而白球有 3 个, 如果将每一个球都编上号码, 1 号球(红色)、2 号球(红色)、3 号球(白色)、4 号球(白色)、5 号球(白色), 摸出每一个球的可能性相同, 共有 5 种等可能的结果. 摸到红球可能出现的结果有: 摸出 1 号球或 2 号球, 共有 2 种等可能的结果. 所以, $P(\text{摸到红球}) = \frac{2}{5}$.

你认为谁说的有道理?

2. 小明和小凡一起做游戏. 在一个装有 2 个红球和 3 个白球(每个球除颜色外都相同)的袋中任意摸出一个球, 摸到红球小明获胜, 摸到白球小凡获胜. 这个游戏对双方公平吗? 在一个双人游戏中, 你是怎样理解游戏对双方公平的?

做一做

选取 4 个除颜色外完全相同的球设计一个摸球游戏.

- (1) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$, 摸到白球的概率也是 $\frac{1}{2}$;
- (2) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$, 摸到白球和黄球的概率都是 $\frac{1}{4}$.

做一做

这是一个具有挑战性的活动, 学生要根据要求设计游戏, 这体现了概率模型的思想. 教师可以在学生独立思考的基础上组织小组讨论.

- (1) 选取的 4 个球, 其中 2 个红球, 2 个白球;
- (2) 选取的 4 个球, 其中 2 个红球, 1 个白球, 1 个黄球.

议一议

1. 小颖说的有道理. 教科书用小明错误的说法来提醒学生并不是任意事件是等可能的, 教师可以再举一些类似的例子, 以加深对此的理解.

2. $P(\text{小明获胜}) = \frac{2}{5}$,
 $P(\text{小凡获胜}) = \frac{3}{5}$, 由于两人获胜的概率不同, 所以游戏对双方不公平. 在一个双人游戏中, 游戏对双方公平是指双方获胜的概率相同.

想一想

8个球:

(1) 4个红球, 4个白球;

(2) 4个红球, 2个白球,

2个黄球.

7个球: 不可能.

随堂练习

1. $P(\text{摸到红球}) = \frac{1}{3}$; $P(\text{摸到白球}) = \frac{2}{9}$; $P(\text{摸到黄球}) = \frac{4}{9}$.

2. 略. 只要设计的游戏使双方获胜的概率相同即可.

习题9.5

1. 不等. 能, 如增加 2 个红球或者减少 2 个白球.
2. $\frac{5}{12}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$.
3. 如 4 个除颜色外完全相同的球, 其中有 3 个是红球, 任取 1 个, 摸到红球的概率. 学生的答案只要合理即可.

想一想

(1) 选取 8 个除颜色外完全相同的球, 你能分别设计满足如上条件的游戏吗?

(2) 选取 7 个除颜色外完全相同的球, 你能分别设计满足如上条件的游戏吗?

随堂练习

1. 一个袋中装有 3 个红球、2 个白球和 4 个黄球, 每个球除颜色外都相同. 从中任意摸出一个球, 则:
- $P(\text{摸到红球}) =$ _____;
- $P(\text{摸到白球}) =$ _____;
- $P(\text{摸到黄球}) =$ _____.
2. 请你设计一个双人游戏, 使游戏对双方是公平的.

习题 9.5

知识技能

1. 一个袋中装有 3 个红球和 5 个白球, 每个球除颜色外都相同. 从中任意摸出一个球, 摸到红球和摸到白球的概率相等吗? 如果不等, 能否通过改变袋中红球或白球的数量, 使摸到红球和摸到白球的概率相等?
2. 一个袋中装有 5 个红球、4 个白球和 3 个黄球, 每个球除颜色外都相同. 从中任意摸出一个球, 则:
- $P(\text{摸到红球}) =$ _____;
- $P(\text{摸到白球}) =$ _____;
- $P(\text{摸到黄球}) =$ _____.

数学理解

3. 请举出一些事件, 它们发生的概率都是 $\frac{3}{4}$.

4. 用 10 个除颜色外完全相同的球设计一个摸球游戏.

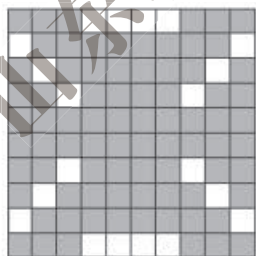
- (1) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{2}$, 摸到白球的概率也是 $\frac{1}{2}$;
 (2) 使得摸到红球的概率是 $\frac{1}{5}$, 摸到白球和黄球的概率都是 $\frac{2}{5}$.

5. 小明和小颖做摸牌游戏, 他们先后从一副去掉大、小王的扑克牌中任意抽取一张牌 (不放回), 谁摸到的牌面大, 谁就获胜. (规定牌面从小到大的顺序为: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, 且牌面的大小与花色无关)

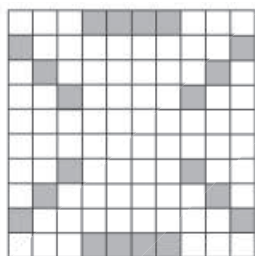
- (1) 刚洗好牌第一次玩, 现小明已经摸到的牌面为 4, 然后小颖摸牌. 问: 小明获胜的概率是多少? 小颖获胜的概率又是多少?
 (2) 若小明已经摸到的牌面为 2, 情况又如何? 小明已经摸到的牌面为 A 呢?

[1] 图 9-3 是卧室与书房地板的示意图, 图中每一块方砖除颜色外完全相同. 将一个小球分别在卧室和书房的地板上自由地滚动, 小球随机地停在某块方砖上.

- (1) 在哪个房间里, 小球停在黑砖上的概率大? 为什么?
 (2) 你觉得小球停在黑砖上的概率大小与什么有关?



卧室



书房

图 9-3

议一议

如果将小球在如图 9-4 所示的地板上自由地滚动, 小球随机地停在某块方砖上, 则小球停在黑砖上的概率是多少?

本课时和下一课时主要是让学生了解可化为古典概型的几何概型的特点和概率计算, 并设计符合要求的简单概率模型.

[1] 教科书通过有趣的问题, 使学生直观地体会到一种重要的概率模型——几何概型, 概率的大小与面积有关, 事件发生的概率等于此事件所有可能结果所组成的图形的面积除以所有可能结果组成的图形的面积.

“每一块方砖除颜色外完全相同, 将一个小球分别在卧室和书房的地板上自由地滚动, 小球随机地停在某块方砖上”, 是为了保证随机性, 在教学时应该让学生体会随机性的重要性.

(1) 在卧室里, 小球停留在黑砖上的概率大. 因为在卧室里, 黑砖的面积占整个卧室的面积之比要比书房大.

(2) 小球停留在黑砖上的概率大小与面积有关.

学生能够用自己的语言回答即可.

4. (1) 5 个红球, 5 个白球;
 (2) 2 个红球, 4 个白球, 4 个黄球.

5. (1) 小明获胜的概率是 $\frac{8}{51}$,
 小颖获胜的概率是 $\frac{40}{51}$;

- (2) 若小明已经摸到的牌面为 2, 则小明获胜的概率是 0, 小颖获胜的概率是 $\frac{48}{51}$;

若小明已经摸到的牌面为 A, 则小明获胜的概率是 $\frac{48}{51}$, 小颖获胜的概率是 0.

说明: (1) 教师可以引导学生思考: 为什么小明获胜的概率与小颖获胜的概率的和不是 1?

像这样在某事件已经发生 (如小明已经摸到的牌面为 4) 的情况下另一事件 (如小明获胜) 的概率, 也称为条件概率. 在此, 教师无须刻意提出.

议一议

通过讨论,借助已学的古典概型的经验,学生一般可以认识到:如果每一块方砖除颜色外完全相同,小球在地板上自由地滚动,并随机地停留在某块方砖上,那么小球停留在每一块方砖上的概率都相同,所以 $P(\text{小球最终停留在黑砖上}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

想一想

(1) $P(\text{小球最终停留在白砖上}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. 这里渗透了对立事件的概念,但不要求学生掌握.

(2) 这两个事件发生的概率是相等的. 通过此题,使学生了解到虽然许多事件的叙述不同,但它们的实质是相同的,从而体会到概率模型的思想. 在教学中,教师可以鼓励学生再举一些事件,尽管其叙述不同,但它们的实质与本题是相同的,它们发生的概率也是 $\frac{3}{4}$.

例 2

本例是日常生活中常见的抽奖促销活动,让学生体会到“数学就在我们身边”,发展他们“用数学”的意识与能力.

日常生活中有许多抽奖游戏,我们可以利用所学的概率知识来计算某些抽奖游戏获奖的概率,这也体现了概率在生活中的应用. 教师也可以根据当地的一些抽奖促销活动来设计类似的问题情境.

在教学时,首先可以让学生独立思考,然后进行交流. 要让学生明确转盘被等分成 20 份,自由转动转盘,指针指向每一份的可能性都相同,这样才能用教科书上的方法进行计算. 在这里,“获得购物券”的概率也等于“获得 100 元购物券”“获得 50 元购物券”“获得 20 元购物券”的概率的

图 9-4 的地板由 20 块方砖组成,每一块方砖除颜色外完全相同,其中黑色方砖有 5 块. 因为小球随机地停在某块方砖上,它停在任一块方砖上的概率都相等,所以

$$P(\text{小球停在黑砖上}) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$



图 9-4

想一想

在上述“议一议”中:

(1) 小球停在白砖上的概率是多少?

(2) 小明认为(1)的概率与下面事件发生的概率相等:

一个袋中装有 20 个球,其中有 5 个黑球和 15 个白球,每个球除颜色外都相同,从中任意摸出一个球是白球.

你同意他的想法吗?

例 2 某商场为了吸引顾客,设立了一个如图 9-5 所示可以自由转动的转盘(转盘被等分成 20 个扇形),并规定:顾客每购买 100 元的商品,就能获得一次转动转盘的机会. 如果转盘停止后,指针正好对准红、黄或绿色区域,顾客就可以分别获得 100 元、50 元、20 元的购物券.



图 9-5

甲顾客购物 120 元,他获得购物券的概率是多少? 他得到 100 元、50 元、20 元购物券的概率分别是多少?

解: 甲顾客的消费额在 100 元到 200 元之间,因此可以获得一次转动转盘的机会.

转盘被等分成 20 个扇形,其中 1 个是红色,2 个是黄色,4 个是绿色,因此,对于甲顾客来说,

$$P(\text{获得购物券}) = \frac{1+2+4}{20} = \frac{7}{20};$$

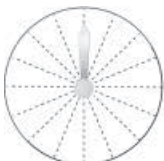
$$P(\text{获得 100 元购物券}) = \frac{1}{20};$$

$$P(\text{获得 50 元购物券}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10};$$

$$P(\text{获得 20 元购物券}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

随堂练习

- 如图所示, 转盘被等分成 16 个扇形. 请在适当的地方涂上颜色, 使得自由转动这个转盘, 当它停止转动时, 指针落在黑色区域的概率为 $\frac{3}{8}$.
- 你还能举出一些不确定事件, 它发生的概率也是 $\frac{3}{8}$ 吗?

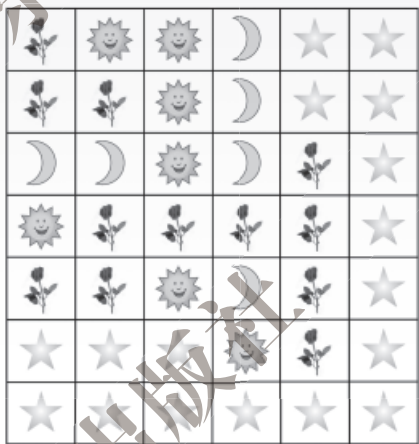


(第 1 题)

习题 9.6

知识技能

- 下图是一个寻宝游戏的藏宝图, 图中每个方块除了图案外都相同, 宝藏随机地藏在某一方块内, 那么宝藏藏在各种图案下的概率分别是多少?



(第 1 题)

随堂练习

随堂练习是一些开放性的问题, 答案不唯一, 应鼓励学生多给一些符合要求的答案, 并从中体会概率模型的思想.

- 答案不唯一, 只要黑色区域占 6 份即可. 注意: 这 6 份不一定要连在一起.
- 应鼓励学生多举出一些概率为 $\frac{3}{8}$ 的事件.

习题 9.6

- 宝藏藏在“花”图案下的概率为 $\frac{2}{7}$, 藏在“太阳”图案下的概率为 $\frac{1}{6}$, 藏在“月亮”图案下的概率为 $\frac{1}{7}$, 藏在“星”图案下的概率为 $\frac{17}{42}$.

2. 在 A 区域内, 踩中地雷的概率为 $\frac{3}{8}$; 在 A 区域外, 共有 $10 - 3 = 7$ 颗地雷, A 区域外共有 $81 - 9 = 72$ 个小方格, 所以在 A 区域外, 踩中地雷的概率为 $\frac{2}{72}$. 因为 $\frac{3}{8} > \frac{2}{72}$, 所以为了尽可能不踩中地雷, 小明的第二步应踩在 A 区域外的小方格上.

3. (1) $\frac{3}{8}, \frac{1}{3}$;
(2) 略.

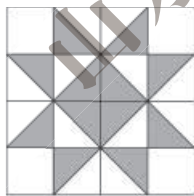
2. 同学们玩过计算机“扫雷”游戏吗? 右图为计算机“扫雷”游戏的画面, 在 9×9 个小方格的雷区中, 随机地埋藏着 10 颗地雷, 每个小方格最多能埋藏 1 颗地雷. 小明游戏时先踩中一个小方格, 显示数字 3 (如图所示), 它表示与这个方格相邻的 8 个小方格 (图中黑框所围区域, 设为 A 区域) 中埋藏着 3 颗地雷. 为了尽可能不踩中地雷, 小明的第二步应踩在 A 区域内的小方格上还是应踩在 A 区域外的小方格上?



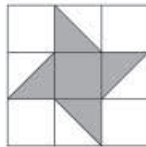
(第 2 题)

数学理解

3. (1) 如果将一个小球在如图 (1) 所示的地板上自由地滚动, 小球随机地停在某块方砖上, 那么它停在黑色区域的概率是多少? 如果将小球在如图 (2) 所示的地板上自由地滚动呢?
(2) 请你设计几种地砖图案, 使得将一个小球在上面自由滚动时, 小球停在黑色区域的概率是 $\frac{1}{3}$.



(1)



(2)

(第 3 题)

^[1] 图 9-6 是一个可以自由转动的转盘, 转动转盘, 当转盘停止时, 指针落在红色区域和白色区域的概率分别是多少?

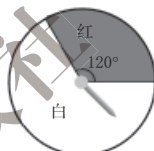


图 9-6



指针不是落在红色区域就是落在白色区域, 落在红色区域和白色区域的概率相等. 所以 $P(\text{落在红色区域}) = P(\text{落在白色区域}) = \frac{1}{2}$.

这一问题旨在纠正一些学生的错误想法. 小明的做法不正确. 因为转盘中红色部分和白色部分的面积不同, 因而指针落在这两个区域的可能性不同.

把可能性不同的情况当成等可能的情况处理, 这是学生容易犯的错误.

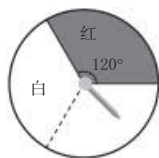


图 9-7



先把白色区域等分成 2 份 (如图 9-7), 这样转盘被等分成 3 个扇形区域, 其中 1 个是红色, 2 个是白色, 所以 $P(\text{落在红色区域}) = \frac{1}{3}$, $P(\text{落在白色区域}) = \frac{2}{3}$.

你认为谁做得对? 说说你的理由, 你是怎样做的?

想一想

转动如图 9-8 所示的转盘, 当转盘停止时, 指针落在红色区域和白色区域的概率分别是多少? 你有什么方法? 同伴进行交流.

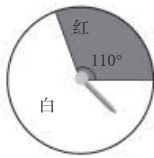


图 9-8

例 3 某路口南北方向红绿灯的设置时间为: 红灯 40 s、绿灯 60 s、黄灯 3 s. 小明的爸爸随机地由南往北开车经过该路口, 问:

- (1) 他遇到红灯的概率大还是遇到绿灯的概率大?
- (2) 他遇到红灯的概率是多少?

解: (1) 小明的爸爸随机地经过该路口, 他每一时刻经过的可能性都相同, 因为该路口南北方向红绿灯的设置时间为: 红灯 40 s、绿灯 60 s、黄灯 3 s. 绿灯时间比红灯时间长, 所以他遇到绿灯的概率大.

- (2) 他遇到红灯的概率为:

$$\frac{40}{40+60+3} = \frac{40}{103}.$$

随堂练习

请你设计一个转盘, 使得自由转动这个转盘, 当它停止转动时, 指针落在红色区域的概率为 $\frac{3}{8}$, 落在白色区域的概率为 $\frac{3}{8}$, 落在黄色区域的概率为 $\frac{1}{4}$.

可能从几何概型的特点出发, 计算出红色区域的面积占整个圆面积的 $\frac{11}{36}$, 白色区域的面积占整个圆面积的 $\frac{25}{36}$, 从而 $P(\text{落在红色区域}) = \frac{11}{36}$, $P(\text{落在白色区域}) = \frac{25}{36}$ 等等. 只要学生的想法合理, 教师都应该鼓励.

建议教师最后也可以和学生一起总结出类似转盘问题的概率计算方法或公式.

例 3

粗看例 3, 好像既不是古典概型的问题, 也不是几何概型的问题, 但细究之下, 它与我们前面遇到的几何概型的问题一样, 最后都可以化归为古典概型的问题: 由于小明的爸爸每一时刻经过的可能性都相同, 所以我们可以将一个信号周期等分为 103 份, 其中红灯占 40 份, 绿灯占 60

小颖做得对. 教师也可以引导学生体会小颖的做法.

想一想

这是一个比较有趣的问题, 教师可以先让学生独立思考, 然后组织学生进行交流. 这个问题既与前面的问题类似, 又有所差别. 有的学生可能受前面小颖做法的影响, 把白色区域等分成 25 份, 红色区域等分成 11 份, 这样转盘被等分成 36 个扇形区域, 其中 11 个是红色, 25 个是白色, 所以 $P(\text{落在红色区域}) = \frac{11}{36}$, $P(\text{落在白色区域}) = \frac{25}{36}$; 也可能把白色区域等分成 250 份, 红色区域等分成 110 份, 这样转盘被等分成 360 个扇形区域, 其中 110 个是红色, 250 个是白色, 所以 $P(\text{落在红色区域}) = \frac{11}{36}$, $P(\text{落在白色区域}) = \frac{25}{36}$; 有的学生

份，黄灯占 3 份，因此他遇到红灯的概率为 $\frac{40}{103}$ 。

在教学时，教师可以引导学生举出与本例叙述不同，但本质相同的概率模型。如，有一个由 103 个小方块组成的区域，其中有 40 个红色小方块，60 个绿色小方块，3 个黄色小方块，每一块方砖除颜色外完全相同。一个小球在上面自由地滚动，并随机地停留在某块方砖上，它最终停留在红色小方块上的概率是多少？使学生从中体会到概率模型的思想。

本例是日常生活中常见的现实情境，可以让学生体会到“数学就在我们身边”，发展他们“用数学”的意识与能力。

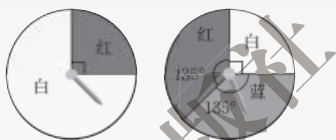
《《》随堂练习

答案不唯一。如转盘被分成 8 个相同的扇形，其中红色区域占 3 份，白色区域占 3 份，黄色区域占 2 份等。

习题 9.7

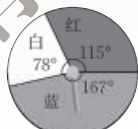
知识技能

1. 下面是两个可以自由转动的转盘，转动转盘，分别计算转盘停止后，指针落在红色区域的概率.



(第1题)

2. 下面是一个可以自由转动的转盘，转动转盘，转盘停止后，指针落在红色区域的概率是多少？



(第2题)

3. 某电视频道播放正片与广告的时间之比为 7 : 1，广告随机地穿插在正片之间. 小明随机地打开电视机，收看该频道，他开机时恰好播放正片的概率是多少？

数学理解

4. 请你设计一个转盘，使得自由转动这个转盘，当它停止转动时，指针落在红色区域的概率为 $\frac{4}{9}$ ，落在白色区域的概率为 $\frac{1}{3}$ ，落在黄色区域的概率为 $\frac{2}{9}$.

习题 9.7

$$1. \frac{1}{4}; \frac{3}{8}.$$

$$2. \frac{115}{360} = \frac{23}{72}.$$

$$3. \frac{7}{8}.$$

4. 答案不唯一，如可将转盘分红色、白色、黄色三个区域，红色区域的圆心角为 160° ，白色区域的圆心角为 120° ，蓝色区域的圆心角为 80° .

回顾与思考

通过本章的学习和探究, 学生需要对概率论的相关知识进行回顾与思考, 为此, 教科书设计了“回顾与思考”这一环节, 目的是让学生通过回答问题, 梳理本章所学的知识, 加深对本章学习内容的理解, 养成回顾与反思的习惯, 获得知识系统的自主建构能力. 为了更加清晰直观地帮助学生建构知识系统, 教学时需要借助典型问题, 对有关重点知识进行巩固运用.

为了培养学生养成回顾与反思的习惯和梳理知识的能力, 教学时应尽可能鼓励学生自主地对所学知识进行整理, 制作个性化的知识结构图, 教师应该用欣赏的眼光看待学生的“作品”. 如果学生缺乏梳理知识的经验和能力, 操作上有困难, 那么教师可给予适当的引导. 比如, 教师可以选择以下教学措施: 提前布置任务, 让学生以小组合作的形式整理本章知识点; 教师将本章知识点细化为几部分, 让不同小组整理不同部分的内容, 或利用“回顾与思考”中的问题进行分工, 全班合作梳理全章知识; 教师有目的地布置课前作业或课上例题, 学生以题目中涉及的相关知识点为线索, 在教师的帮助下完成全章的知识梳理

教学中, 可以根据学生的实际情况, 选择合适的教学方式.

以下是知识梳理环节的教学建议, 供参考.

1. 复习回顾

引导学生回顾知识内容呈现的顺序、知识内容的分类等, 回忆全章相关内容. 教师可以课前布置任务, 让学生复习本章内容, 回顾各节学习的知识点.

2. 思考整理

引导学生将获得的信息进行加工、选择、组合, 使所学的内容条理化、有序化、结构化. 教师

回顾与思考

1. 举例说明什么是随机事件.
2. 事件发生的概率与频率有什么区别和联系?
3. 你能设计一些对双方都公平的游戏吗?
4. 举例说明如何求随机事件的概率. 在什么条件下适合用公式 $P(A) = \frac{m}{n}$ 来求随机事件的概率?
5. 用适当的方式梳理本章的知识, 并与同伴进行交流.

复习题

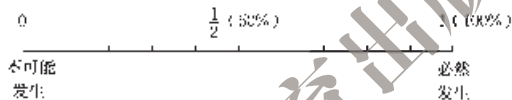
知识技能

1. 下列事件中, 哪些是确定的? 哪些是不确定的? 请说明理由.
 - (1) 车辆随机经过一个路口, 遇到红灯;
 - (2) 两条线段可以组成一个三角形;
 - (3) 400 人中至少有两人的生日在同一天;
 - (4) 掷一枚均匀的骰子, 掷出的点数是质数.
2. 下面是一些可以自由转动的转盘, 请你按照转盘停止后指针落在黄色区域的可能性由大到小进行排列.



(第2题)

3. 请将下列事件发生的概率标在图中:



(第3题)

可对本章主要的学习内容进行提问,在学生回答和教师适度追问的基础上,教师在黑板上适当的位置写下相应的内容.对于较抽象的概念等内容,教师可根据情况让学生进行一定的解释和举例说明.

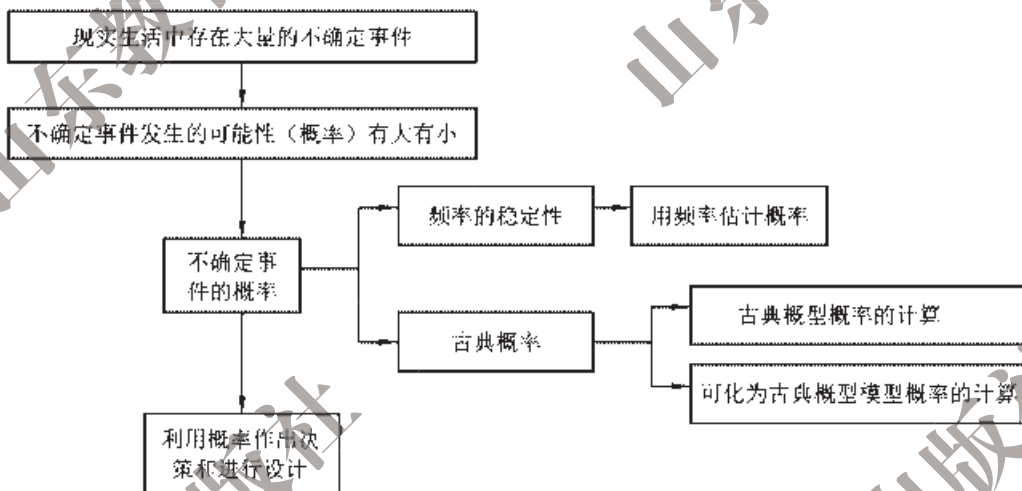
3. 形成框架

在前述两个环节的基础上,在黑板上形成了一个本章的知识框架图.教师分析这个框架图,解释其中较为重要的知识点,并提供典型的例题和习题.在设计相关例题时,也要与这些重要的知识点、考查点相对应.

4. 反思提高

引导学生对解决问题过程中所用知识、方法、策略等进行反思和评价,增进对概率论知识体系的认识,提高解决问题的能力.

下面是一个可供参考的结构框图.



下面的典型例题供参考.

例 1 以下说法合理的是 ().

- (A) 小明做 3 次抛图钉的试验,发现 2 次钉尖朝上,由此他说钉尖朝上的概率是 $\frac{2}{3}$
- (B) 某彩票的中奖概率是 5%,那么如果买 100 张彩票一定会有 5 张中奖
- (C) 某射击运动员射击一次,只有两种可能的结果:中靶与不中靶,所以它们发生的概率都是 $\frac{1}{2}$
- (D) 小明做了 3 次抛掷均匀硬币的试验,其中有 1 次正面朝上,2 次正面朝下,他认为再抛一次,正面朝上的概率还是 $\frac{1}{2}$

说明: 本题是有关随机事件及其概率意义的一组判断.(A) 小明做的试验次数太少,以此估计钉尖朝上的概率不太合理;(B) 彩票的中奖概率是 5%,但由于随机现象的特点,买 100 张彩票,中奖的彩票数可能大于 5,也可能小于 5;(C) 中所有可能的结果确

实只有两种：中靶与不中靶，但是这两种结果不是等可能的，所以不能说它们发生的概率都是 $\frac{1}{2}$ ；(D) 中由于硬币是均匀的，所以无论前面有没有抛掷过硬币，无论前面抛掷硬币的结果是什么，再抛一次，正面朝上的概率还是 $\frac{1}{2}$ 。

答案：D.

例 2 一个口袋中装有 4 个白球，6 个红球，这些球除颜色外完全相同，充分搅匀后随机摸出一球，发现是白球.

(1) 如果将这个白球放回，再摸出一球，那么它是白球的概率是多少？

(2) 如果这个白球不放回，再摸出一球，那么它是白球的概率是多少？

说明：在用古典概型的概率计算公式计算概率时，关键是计算试验中所有等可能的结果总数和所求事件中可能出现的结果数.

解：(1) 由于将白球放回，此时口袋中仍有 4 个白球，6 个红球，再摸出一球，所有等可能的结果总数为 $4 + 6 = 10$ ，所求事件中可能出现的结果数为 4，所以

$$P(\text{摸到的球是白球}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

(2) 白球不放回，此时口袋中有 3 个白球，6 个红球，再摸出一球，所有等可能的结果总数为 $3 + 6 = 9$ ，所求事件中可能出现的结果数为 3，所以

$$P(\text{摸到的球是白球}) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

复习题

1. (1) 不确定；(2) 确定（不可能事件）；(3) 确定（必然事件）；(4) 不确定.

2. 按照转出黄色的可能性由大到小排列为：③ ⑤ ① ④ ②.

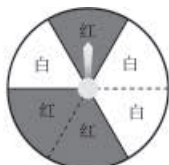
3. 图略. 以下分别是三个事件发生的概率：

(1) 1；

(2) 0；

(3) $\frac{1}{2}$.

- (1) 将3个人分成两组, 一定有2个人分在一组;
 (2) 随意掷两枚均匀的骰子, 朝上面的点数之和为1;
 (3) 自由转动如图所示的转盘(转盘被等分成6个扇形), 指针停在红色的区域中.



(第3(3)题)

4. 如图所示有9张卡片, 分别写有1至9这九个数字. 将它们背面朝上洗匀后, 任意抽出一张.



- (1) $P(\text{抽到数字} 9) =$ _____;
 (2) $P(\text{抽到两位数}) =$ _____;
 (3) $P(\text{抽到的数大于} 6) =$ _____, $P(\text{抽到的数小于} 6) =$ _____;
 (4) $P(\text{抽到奇数}) =$ _____, $P(\text{抽到偶数}) =$ _____.

5. 如图, 有一枚均匀的正二十面体形状的骰子, 其中的1个面标有“1”, 2个面标有“2”, 3个面标有“3”, 4个面标有“4”, 5个面标有“5”, 其余的面标有“6”. 将这个骰子掷出后:



(第5题)

- (1) “6”朝上的概率是多少?
 (2) 数字几朝上的概率最大?

数学理解

6. 如图是一个转盘, 小颖认为转盘上共有三种不同的颜色, 所以自由转动这个转盘, 指针停在红色、黄色或蓝色区域的概率都是 $\frac{1}{3}$. 你认为呢?



(第6题)

4. (1) $\frac{1}{9}$;

(2) 0;

(3) $\frac{1}{3}, \frac{5}{9}$;

(4) $\frac{5}{9}, \frac{4}{9}$. (这里渗透 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, 但不要求学生掌握)

5. (1) 有5个面标有数字“6”, 所以“6”朝上的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$;

(2) 标有数字“5”“6”的面最多, 所以“5”“6”朝上的概率最大.

6. 指针停在红色、黄色和蓝色的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

7. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{1}{3}$.

8. $\frac{1}{7}$, 略.

9. 选择方法(2)中“不是3的倍数”.

10. 小明的想法是错误的, 由于硬币是均匀的, 所以再抛一次, 正面朝上的概率仍为 $\frac{1}{2}$.

11. (1) 在出发点后的可能性大. 虽然“前进一步”和“后退两步”的概率一样大, 但前进的步数比后退的步数少, 所以转动若干次后, 在出发点后的可能性大.

(2) 略.

7. 一只小鸟自由自在地在空中飞行, 然后随意落在如图(1)所示的某个方格中(每个方格除颜色外完全相同), 则小鸟停在白色方格中的概率是多少? 如果小鸟随意落在图(2)所示的某个方格中, 它停在白色方格中的概率又是多少?



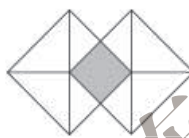
(1)



(2)

(第7题)

8. 如图, 假设可以随意在图中取点, 那么这个点取在阴影部分的概率是多少? 请你重新设计图案, 使得这个点取在阴影部分的概率为 $\frac{3}{7}$.



(第8题)



(第9题)

9. 如图, 一个均匀的转盘被等分成10份, 分别标有1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10这10个数字. 转动转盘, 当转盘停止后, 指针指向的数字即为转出的数字. 两人参与游戏: 一人转动转盘, 另一人猜数, 若所猜数字与转出的数字相符, 则猜数的人获胜, 否则转动转盘的人获胜. 猜数的方法从下面三种中选一种:

- (1) 猜“是奇数”或“是偶数”;
- (2) 猜“是3的倍数”或“不是3的倍数”;
- (3) 猜“是大于6的数”或“不是大于6的数”.

如果轮到你猜数, 那么为了尽可能获胜, 你将选择哪一种猜数方法? 怎样猜?

10. 小明做了5次抛掷均匀硬币的试验, 其中有2次正面朝上、3次正面朝下. 他认为再抛一次, 一定正面朝上. 你同意他的观点吗? 与同伴进行交流.

问题解决

11. 自由转动转盘, 按指针所指区域的指示行动.

- (1) 转动若干次, 最后是在出发点前的可能性大还是在出发点后的可能性大?
- (2) 连续转动20次, 试一试, 看情况怎么样.



(第11题)

12. 如图(甲), 有一批宝藏被随意埋在长方形区域内(图中每个方格完全相同)。

- (1) 假如你去寻找宝藏, 你会选择哪个区域? 为什么? 在这个区域一定能找到宝藏吗?
- (2) 宝藏埋在哪两个区域的可能性相同?
- (3) 如果埋宝藏的区域如图(乙)所示(图中每个三角形完全相同), (1)(2)的结果又会怎样?



(甲)



(乙)

(第12题)

13. 请你设计一个游戏, 并说明在你的设计中游戏者获胜的概率是多少。

联系拓展

14. 现有足够多除颜色外均相同的球, 请你从中选12个球设计摸球游戏。

- (1) 使摸到红球的概率和摸到白球的概率相等;
- (2) 使摸到红球、白球、黑球的概率都相等;
- (3) 使摸到红球的概率和摸到白球的概率相等, 且都小于摸到黑球的概率。

12. (1) 选择区域 2, 因为区域 2 的面积最大, 但不能保证在区域 2 内一定能找到宝藏;

(2) 区域 1 和区域 3;

(3) 选择区域 2, 因为区域 2 的面积最大, 但不能保证在区域 2 内一定能找到宝藏. 宝藏埋在区域 1 和区域 3 的可能性相同. 事实上, 宝藏埋在哪一个区域的可能性大小只与区域的面积有关, 区域的面积越大, 其可能性就越大, 区域的面积越小, 其可能性就越小, 而与区域的形状无关。

13. 略。

14. 本题的方案有多种, 如:

- (1) 6 个红球, 6 个白球;
- (2) 4 个红球, 4 个白球, 4 个黑球;
- (3) 3 个红球, 3 个白球, 6 个黑球。

附录 典型案例评析

频率的稳定性（第1课时）

设计：南京树人国际学校 孔繁智 杨冬慧

一、学情分析

通过以前的学习，学生已经对事件发生的可能性的有了初步认识，但可能存在一些“误解”。如，只出现两种结果的试验，那么这两种结果发生的可能性一定都是 $\frac{1}{2}$ ；又如，所有事件的概率都可以通过理论计算得到等。因此，活动的设计和安排都是为了学生能正确地认识和理解概率的相关知识。

二、任务分析

教材从抛掷图钉试验入手，使学生经历“猜测—试验和收集试验数据—分析试验结果—验证猜测”的过程，初步了解在试验次数很大时，事件发生的频率具有稳定性。通过摸球游戏和随堂练习中提供的问题情境加深对前面结论的认识。最后通过小结对本节课的体会进行梳理，为下节课的明晰做好铺垫。

三、教学目标

1. 经历猜测试验、收集试验数据、分析试验结果等活动过程，体验在活动过程中发展学生合作交流的意识与能力。
2. 通过试验，感受试验次数很大时，事件发生的频率具有稳定性。

四、教学重、难点

经历“猜测—试验和收集试验数据—分析试验结果—验证猜测”的过程，感受在试验次数很大时，事件发生的频率具有稳定性。

五、教学过程

【第一环节】提出问题

问题：抛掷一枚图钉，落地后，通常会出现两种情况：

（两幅图，分别展示钉尖朝上和钉尖朝下两种情况）

你认为钉尖朝上和钉尖朝下的可能性一样大吗？

目的：学生在小学阶段对事件发生的可能性大小已有初步认识，选择一个没有确定结果的情境，比较能吸引学生的注意力，激发学生的好奇心和对试验结果的渴望。教师可以在提出问题的同时，在讲台上抛掷一枚图钉，对学生即将进行的操作试验起到示范作用，同

时学生对抛掷图钉有了直观的认识.

预期:绝大多数学生基本可以确定钉尖朝上和钉尖朝下的可能性不一样大,但对“哪一个大”“大多少”等这样更具体的比较是不能确定的.学生对问题的思考不会停留在“不一样大”上,可能会对更具体的结果进行争论,教师可以提出请学生对结果进行猜测和表述的要求,在黑板的一角记录下学生猜测的结果,在试验结束后进行比较,感受猜测与试验结果的差异.另外,学生对猜测结果的具体表述不是对概率的猜测,可以有不同形式,如百分数、分数、几成或远远大于、大一点儿等笼统的描述.

【第二环节】试验操作

内容:在学生迫切希望知道抛掷图钉问题结果的基础上,引导学生进行试验操作.

提出操作要求:站在课桌旁,从齐肩的高度处抛下图钉.为了避免图钉经常落到地面上,可以在课桌四周用纸板围挡.

分组布置任务:四人一组,每位同学按要求抛掷十次,不符合要求者重新抛掷.一位同学抛掷时,另一位同学记录结果(钉尖朝上或钉尖朝下),其他两位同学监督抛掷是否符合要求和记录是否正确.

目的:在学生初步认识可能性的情况下,对一些不能确定的事件进行操作是最基本的方法.对操作所提出的要求应尽量具体,方便学生规范地进行操作,同时保证结果的合理性.操作过程中,注意提高学生对活动的参与度,培养学生合作的态度和意识.教材中给出的操作步骤和表格是一个示范,具体的试验操作步骤可以根据学生的情况进行安排.本案例操作设计中选用每组 40 次,目的是为了在下面的环节中通过对分组累计结果和汇总累计结果的比较,体会试验次数对结果的影响.

预期:操作过程中注意安全,任课教师应结合平时对学生的了解,着重关注某些学生.任务的明确性也是试验能顺利进行的保证,因此课前对各种可能出现的问题应进行充分的考虑.

【第三环节】分析数据

内容:在学生完成试验的基础上,对试验操作的结果进行收集整理和分析.

1. 分组累计 40 次试验中钉尖朝上和钉尖朝下的次数,同组同学交流对试验结果的认识并汇报结果;
2. 收集全班同学的试验结果,在 Excel 中制作表格并生成折线统计图;
3. 比较分组累计结果和汇总累计结果,与同学交流.

目的:分组获得的数据在描述抛掷图钉可能出现的情况时,各组差异可能会较大,汇总后,学生能直观地体会到试验次数增加后,结果相对稳定.学生对结果有了相对统一的认识之后,与前面猜测的结果进行比较,体会试验操作结果与直觉感知之间的差异.本节课的重点是通过试验操作体会频率与概率之间的关系,而不是绘制统计图,且试验操作应给予学生足够的时间,因此,在汇总数据时可发挥现代技术的作用,使用计算器或计算机操作.

预期：在教师没有指明用怎样的形式对结果进行描述时，学生可能仅根据钉尖朝上和钉尖朝下的次数进行判断，最好能引导学生主动选用频率描述结果，如果有困难，可以选用填写教材中的表格后再判断的方式。

【第四环节】游戏理解

内容：教师拿出一个不透明的袋子，提出问题：

这个袋子中装了若干枚黑、白棋子，除颜色外完全相同，在不打开看的情况下，你能确定两种颜色的棋子哪种多吗？说说你的想法。

由于有前面的试验操作为基础，学生自然会想到用摸球试验的方法进行判断。教师应引导学生先整理试验操作步骤，再组织学生进行分组试验，先分组根据试验结果进行累计、猜测，再对全班的数据进行汇总累计，交流、统一意见后，教师拿出袋子中的棋子揭示结果。

目的：通过对上述操作步骤和结果的体会，设置游戏，进一步理解试验次数很大时，事件发生的频率具有稳定性，渗透频率与概率之间的联系。

预期：教师应根据课前对分组情况的思考，准备相应个数的不透明袋子和棋子。有前面的操作经验，游戏的过程应比较快，同样用 Excel 累计数据和绘制统计图。

【第五环节】小结归纳

内容：通过上述操作试验，你有哪些体会？结合“随堂练习”中的问题思考并交流。

目的：对本课时的感受和体会进行梳理。

预期：由于本课时没有对结论进行明晰，鼓励学生用自己的语言表达。

【第六环节】布置作业

内容：完成习题第 1、2 题。

目的：用更多的情境和试验操作对本课时知识进行巩固。

预期：对习题中的试验操作（抛掷瓶盖），教师最好能做出更细致的安排。如，可以统一瓶盖和操作要求，这样对于全班同学得到的试验结果可以进行累计，再次体会试验次数很大时事件发生频率的稳定性；又如，可以对学生分组对不同的瓶盖进行试验，然后全班交流，获得更多的经验。

六、评析

本课时的两个试验操作是重要内容，怎样组织操作活动，怎样引导学生带着问题进行试验，怎样引导学生对试验结果进行分析等，都应该是教师在活动前认真思考的问题。教师可能对学生最终得到的感受有不确定性，但应对学生的操作步骤和过程准确把握。另外，在统计和概率的很多问题探究中，用到试验的方法收集和整理数据，重点都是对所收集的数据进行分析，可以有效地利用现代技术的手段，节省时间且突出重点，本课时中 Excel 的应用就是一个很好的例子，概率中的模拟试验也可以用计算器或 Excel 解决。

第十章 三角形的有关证明

一、《标准》要求

1. 掌握以下基本事实：

- (1) 两点确定一条直线；
- (2) 两点之间线段最短；
- (3) 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直；
- (4) 两条直线被第三条直线所截，如果同位角相等，那么这两条直线平行；
- (5) 过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行；
- (6) 两边及其夹角分别相等的两个三角形全等；
- (7) 两角及其夹边分别相等的两个三角形全等；
- (8) 三边分别相等的两个三角形全等。

2. 证明定理：两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等。

3. 探索并证明等腰三角形的性质定理：等腰三角形的两底角相等；底边上的高线、中线及顶角平分线重合。探索并掌握等腰三角形的判定定理：有两个角相等的三角形是等腰三角形。

4. 探索等边三角形的性质定理：等边三角形的各角都等于 60° ；等边三角形的判定定理：三个角都相等的三角形（或有一个角是 60° 的等腰三角形）是等边三角形。

5. 探索并掌握直角三角形的性质定理：直角三角形的两个锐角互余。掌握有两个角互余的三角形是直角三角形。

6. 探索勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题。

7. 探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理。

8. 探索并证明线段垂直平分线的性质定理：线段垂直平分线上的点到线段两端的距离相等；反之，到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上。

9. 探索并证明角平分线的性质定理：角平分线上的点到角两边的距离相等；反之，角的内部到角两边距离相等的点在角的平分线上。

10. 了解原命题及其逆命题的概念。会识别两个互逆的命题，知道原命题成立其逆命题不一定成立。

11. 通过实例体会反证法的含义。

12. 知道证明的意义和证明的必要性，知道证明要合乎逻辑，知道证明的过程可以有不同的表达形式，会综合法证明的格式。

13. 尺规作图：已知底边及底边上的高作等腰三角形；已知一直角边和斜边作直角三角形，过一点作已知直线的垂线。

二、教学目标

1. 经历探索、猜想、证明的过程，进一步体会证明的必要性，发展推理能力。

2. 进一步了解作为证明基础的几条基本事实的内容,掌握综合法的证明方法;结合实例体会反证法的含义.

3. 证明等腰三角形、等边三角形、直角三角形、线段垂直平分线、角平分线的性质定理及判定定理.

4. 证明判定三角形全等的“角角边”定理;探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理.

5. 结合具体例子了解原命题及逆命题的概念,会识别两个互逆命题,并知道原命题成立其逆命题不一定成立.

6. 已知底边及底边上的高线,能用尺规作出等腰三角形;已知一直角边和斜边,能用尺规作出直角三角形;能用尺规过一点作已知直线的垂线.

7. 发展勇于质疑、严谨求实的科学态度.

三、设计思路

根据《标准》的要求,推理能力是数学课程应当发展的核心素养之一;而推理能力包括合情推理能力和演绎推理能力两个方面.本套教科书在“平行线的有关证明”一章之前,研究图形主要采用了实物操作、折纸、画图、度量及轴对称等直观方法,侧重发展学生的合情推理能力;同时,在这一过程中逐步渗透简单的演绎推理训练,让学生理解几何命题之间的因果关系,为严格的演绎证明奠定基础.在本册第八章“平行线的有关证明”一章,教科书正式引入演绎推理的方法及综合法证明的表达形式,从几条基本事实出发,对与平行线有关的几何命题进行严格的证明.本章继续依据“平行线的有关证明”一章中给出的基本事实和已经证明过的定理证明与三角形有关的一些几何命题.

本章所证明的命题大多数与等腰三角形和直角三角形有关,主要包括:等腰三角形(含等边三角形)的性质定理及判定定理、直角三角形的性质定理及判定定理、线段垂直平分线的性质定理及判定定理、角平分线的性质定理及判定定理、判定三角形全等的“角角边”定理,以及判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理.对于这些命题,教科书努力将证明的思路展现出来.教科书首先采用提问的方式让学生回忆这些结论,并回忆探索结论的方法和过程,这些方法和过程往往会对证明的思路有所启发.然后再利用基本事实和已有定理去证明这些结论,并在教科书中给出规范的证明过程.这样处理旨在将抽象的证明与直观的探索联系起来.如在证明“等腰三角形的两底角相等”时,教科书首先回顾利用折纸来探索这个结论的方法,由此促使学生发现证明思路:作底边上的中线构造全等三角形,再证明两个角相等.

本章还涉及一些以前没有探索过的命题,对于这些命题,教科书采用了不同的处理方式:(1)直接通过证明得到部分命题;(2)对于另一部分命题,则尽可能创设一些问题情境,为学生提供自主探索发现的空间,然后再进行证明,从而将证明作为探索活动的自然延续和必要发展,使学生经历“探索—发现—猜想—证明”的过程,体会合情推理与演绎推理在获得结论时各自发挥的作用.如对于“在直角三角形中,如果一个锐角等于 30° ,

那么它所对的直角边等于斜边的一半”，教科书先引导学生拼摆三角尺，探索发现有关结论，同时探索的过程也为即将进行的证明提供了思路。

此外，教科书还注意渗透归纳、类比、转化等数学思想。

本章的设计还考虑了对学生指导方法的指导，以及思维能力的培养。一方面，教科书为学生设置了可将结论进行推广和一般化的空间，将探索发现和证明有机地结合起来；另一方面，教科书还注意引导学生探索证明的不同思路和方法，并进行适当的比较和讨论，开阔学生的视野，培养学生的思维能力。如在一种证明方法结束后提出问题“你还有其他的证明方法吗？与同伴交流”。

本章虽然以演绎证明为主，但在素材和背景的选取上仍注意与实际联系，并尽可能给学生留有观察、探索与发现的机会，从而增强论证的趣味性，激发学生对数学证明的兴趣和掌握综合法证明的信心，同时也使学生体会到演绎证明在实际中的意义和作用。

本章由 5 节构成。第 1 节主要是全等三角形的有关证明；第 2 节主要证明等腰三角形、等边三角形的性质定理及判定定理，并在这一过程中结合实例体会反证法的意义；第 3 节主要证明直角三角形的性质定理和判定定理，结合具体例子了解原命题及其逆命题的概念，探索并证明判定直角三角形全等的“斜边、直角边”定理；第 4 节主要证明线段垂直平分线的性质定理和判定定理，并用尺规作等腰三角形；第 5 节主要证明角平分线的性质定理和判定定理。

四、课时安排建议

1 全等三角形	3 课时
2 等腰三角形	4 课时
3 直角三角形	2 课时
4 线段的垂直平分线	2 课时
5 角平分线	2 课时
回顾与思考	2 课时

五、教学建议

1. 使学生经历探索、猜想、证明的过程，进一步体会证明的必要性。

如前所述，本章既涉及一些以前曾经探索过的命题，又涉及一些新的结论，因此在教学中，应把证明作为探索活动的自然延续和必要发展，引导学生从问题出发，根据观察、实验的结果，运用归纳、类比的方法首先得出猜想，然后再进行证明，这样做有利于学生全面地理解证明。在具体教学时，一方面，教师可引导学生回忆探索的过程及其得出的结论，并强调证明的必要性；另一方面，学生经过探索还会得到以往没有探索过的新的结论，然后再去证明。教师应充分利用这样的机会，启发引导学生体会探索结论和证明结论的相互关系，即合情推理与演绎推理的相互依赖和相互补充的辩证关系。

2. 注重对证明思路的启发, 关注学生的独立思考.

在掌握了基本的证明步骤和要求的基础上, 发现结论、探索证明的思路与方法是学习本章内容的重点和难点. 教学时应注意多让学生观察、操作, 尽可能让学生独立地获取结论; 对于证明思路和方法, 教师应给学生留出充分思考的时间和空间, 鼓励学生大胆尝试、交流, 并在此基础上针对不同学生进行恰当的引导, 帮助他们分析辅助线的添加、辅助图形的构造. 在这个过程中, 以前探索结论时所使用的方法对证明思路往往具有重要的启迪作用, 教师应注意引导、启发. 同时, 很多结论的证明方法是不唯一的, 辅助线的添加方法也是多种多样的, 因此教师在教学中要注意引导学生探索证明的不同方法, 提倡证明方法的多样性, 并引导学生在与他人的交流中比较证明方法的异同, 提高逻辑思维水平. 例如, 在证明“等腰三角形的两底角相等”时, 可以有不同的作辅助线的方法, 从而导致不同的证明方法. 教师应鼓励学生通过交流探索发现这几种不同的证明方法.

3. 要求学生掌握证明的基本要求和方法.

推理证明是本章学习的重点, 因此教学中要注意培养学生掌握推理证明的基本要求. 如明确条件和结论, 能够用数学的符号语言正确表达; 明确每一步推理的依据并能准确地表达推理的过程. 通过一定数量的推理证明训练, 逐步使学生掌握证明的方法和思路. 例如, 在应用“斜边、直角边”定理证明时, 教师可以先引导学生分析使用这种判定方法需要具备的条件: 在两个直角三角形中, 斜边分别相等, 一条直角边分别相等. 只有同时具备这三个条件, 才能用“斜边、直角边”定理判定两个直角三角形全等.

对于反证法, 教学中可通过生活实例和简单的数学实例使学生体会其思想, 不必对反证法的证明格式和证明难度提出过高要求.

4. 注意数学思想在教学中的渗透以及对学生学习方法的启发.

命题的探索和证明过程往往蕴含着一些数学思想, 如归纳的思想、类比的思想、转化的思想、反证法的思想等. 教学中应注重这些思想的渗透, 有意识地引导学生去领会这些思想并应用于解决具体问题的过程中, 从而帮助学生形成正确的数学学习方法. 同时, 在探索和证明活动中还要注意培养学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力.

5. 依据《标准》和教科书的基本要求, 把握好证明题的难度.

体验和掌握证明的基本方法, 需要证明一定数量的命题, 但要避免过分追求证明题的数量及证明技巧. 教学应依据教科书的基本要求, 控制好证明题的难度.

六、评价建议

1. 关注对学生探索结论和证明思路、证明方法等过程的评价.

在本章中, 无论是一些新结论的获得, 还是命题证明的思路和方法的获得, 都需要学生进行探索, 因此学生在这类探索活动中的表现是评价的重要方面. 其一, 要关注学生能否积极主动参与探索活动以及与同伴之间的交流情况; 其二, 要关注学生能否通过独立思考获得证明的思路, 能否使用规范的数学语言表达思考的过程, 能否尝试用不同的方法去证明同一个命题.

2. 关注学生对证明思路、证明方法的掌握情况和推理证明能力的水平.

在本章的命题证明中, 相对于证明的技巧来说, 证明的思路和方法更重要, 所以要关注学生证明思路、证明方法的掌握情况, 如能否借助直观操作等较为顺利地作出辅助线或辅助图形, 能否将未证明的结论转化为已证明的结论等.

3. 关注学生对论证过程的表述水平.

本章是继“平行线的有关证明”之后又一章以证明为主的内容, 要求学生进一步学习用规范的数学语言来表达整个证明过程, 包括准确表述命题的条件和结论. 因此教师在评价时应注意学生在这方面的表现, 及时指出学生在证明过程中出现的表述方面的问题, 从而培养学生用规范的数学语言进行表达的习惯和能力. 当然, 在评价时, 也要注意学生表述水平的阶段性, 要用欣赏的眼光看待每个学生表述证明过程的点滴进步, 用发展的眼光评价学生.

主题图以一幅三角形建筑图片为背景，配以含有欧几里得、《几何原本》以及勾股定理的证明等内容的电影胶片，意在暗示本章的主要内容。

第十章 三角形的有关证明

我们曾经探索过等腰三角形和直角三角形的一些性质，如等腰三角形“三线合一”的性质、勾股定理等。你还记得获得这些结论的过程吗？你能根据已有基本事实和定理证明这些结论吗？

本章将研究两个三角形全等，证明与等腰三角形和直角三角形的性质及判别条件有关的一些结论，证明线段垂直平分线和角平分线的有关性质，还将研究直角三角形全等的判别条件，进一步体会证明的必要性。

学习目标

- 能利用相关的基本事实和定理证明两个三角形全等
- 经历探索、证明等腰三角形和直角三角形等图形性质与判别条件的过程，进一步发展推理能力
- 能证明等腰三角形的性质定理和判定定理
- 掌握勾股定理及其逆定理，并能运用它们解决一些简单的实际问题
- 探索并掌握直角三角形全等的“斜边、直角边”定理
- 能证明线段垂直平分线、角平分线的性质定理及其逆定理

1 全等三角形

在《平行线的有关证明》一章中，我们给出了八条基本事实，并从其中的几条基本事实出发证明了有关平行线的一些结论。运用这些基本事实和已经学习过的定理，我们还可以证明有关三角形的一些结论。

想一想

有关全等三角形的基本事实有哪些？

基本事实：_____的两个三角形全等。（SAS）

基本事实：_____的两个三角形全等。（ASA）

基本事实：_____的两个三角形全等。（SSS）

^[1] 由上面的基本事实，可以证明许多几何结论。

做一做

我们已经探索过“两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等”这个结论，你能用有关的基本事实和已经证明过的定理证明它吗？

已知：如图 10-1，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle B = \angle B'$ ， $\angle C = \angle C'$ ， $AB = A'B'$ 。

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

证明： $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\angle A' + \angle B' + \angle C' = 180^\circ$ ，

也是允许的，因为科学理论体系和教学体系是可以不同的。这样处理，既不影响基础知识的学习，也不会影响对学生逻辑思维能力的培养和训练。

做一做

这是对下面的定理的证明。虽然简单，也应让学生进行证明，以熟悉证明的基本要求和步骤，为下面的推理证明做准备。

本章教科书的证明过程没有详注理由，而只注明了本章出现的基本事实和定理。对此，教学时可根据学生的具体情况灵活处理。

教学目标

1. 了解作为证明基础的几条基本事实的内容，掌握证明的基本步骤和书写格式。

2. 能灵活地运用“边角边”基本事实、“角边角”基本事实、“边边边”基本事实和“角角边”定理判定两个三角形全等。

3. 对推理证明的要求，应在学生已有的基础上，进一步熟练和提高。

^[1] 在“平行线的有关证明”中，虽然已列出了八条基本事实，但与前五条基本事实一样，在具体使用时，为了强调还是将后三条基本事实重新列出。

教科书中有关三角形全等的三条基本事实，从理论上讲，是可以叠置法证明的，因此是定理。但为了降低学生初学几何的难度和教学的方便，教科书采用扩大公理体系的方式，把它们看作基本事实，这

[1] 如何寻找能判定两个三角形全等的条件呢? 一般可从下列几方面着手: (1) 已知条件; (2) 学过的定义、基本事实、定理、性质等; (3) 从图中看有无公共边、公共角、对顶角、内错角、同位角(当两直线平行时)等. 在书写时, 除列出已知的全等条件外, 对其余条件应首先加以证明, 然后综合得出结论.

[2] 用全等符号“ $\cong$ ”表示两个三角形全等时, 应要求学生把对应顶点的字母写在对应的位置上, 这样会给证明两个三角形全等的问题带来方便. 例如, 由 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ 可知, $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

全等符号“ $\cong$ ”中, “ $\sim$ ”表示形状相同(即相似), “ $=$ ”表示大小相等. 这两层含义可向学生指明, 全等形就意味着形状相同, 大小相等.

$$\begin{aligned}\therefore \angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle C, \\ \angle A' &= 180^\circ - \angle B' - \angle C'. \\ \therefore \angle B &= \angle B', \angle C = \angle C', \\ \therefore \angle A &= \angle A'. \end{aligned}$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中,

$$\begin{aligned}\therefore \angle A &= \angle A', AB = A'B', \angle B = \angle B', \\ \therefore \triangle ABC &\cong \triangle A'B'C' \text{ (ASA)}. \end{aligned}$$

由此可以得到下面的定理:

定理 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等. (AAS)

例1 已知: 如图 10-2, 线段 AB 和 CD 相交于点 O , 线段 $OA = OD$, $OC = OB$.

求证: $AC = BD$, $\angle A = \angle D$. [1]

证明: 在 $\triangle OAC$ 和 $\triangle ODB$ 中,

$$\begin{aligned}\therefore OA &= OD, \\ \angle AOC &= \angle DOB, \\ OC &= OB, \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle OAC \cong \triangle ODB \text{ (SAS)}. [2]$$

$$\therefore AC = BD, \angle A = \angle D \text{ (全等三角形的定义)}.$$

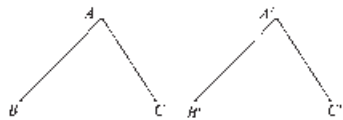


图 10-1

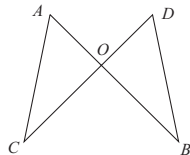


图 10-2

根据全等三角形的定义, 我们可以得到全等三角形的对应边相等、对应角相等.



随堂练习

1. 完成下面的证明过程.

已知: 如图, AB 与 CD 相交于点 O , $\triangle AOC \cong \triangle DOB$.

求证: $\triangle ABD \cong \triangle DCA$.

证明: $\because \triangle AOC \cong \triangle DOB$,

$\therefore AO = DO, CO = BO, AC = DB$ ().

$\therefore \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$,

即 $AB = DC$.

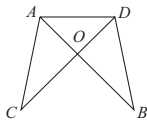
在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle DCA$ 中,

$\therefore DB = AC$,

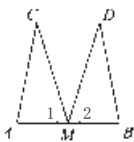
$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$,

$\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$ ().



(第1题)



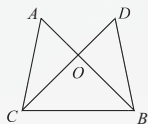
(第2题)

习题 10.1

知识技能

1. 已知: 如图, $\angle ACB = \angle DBC$, $AC = DB$.

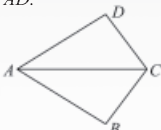
求证: $\angle A = \angle D$, $AB = DC$.



(第1题)

2. 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, $AB = AD$.

求证: AC 平分 $\angle BCD$.



(第2题)

数学理解

3. (1) 已知: 如图, $AB = DE$, $AC = DF$. 要证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 只需再增添一个条件: $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$, 或 $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$;

随堂练习

1. 全等三角形的对应边相等;

$AO + BO = DO + CO$; $AD = DA$; $DB = AC$; SSS.

2. 提示: 利用“ AAS ”进行证明.

习题 10.1

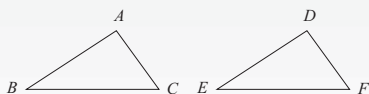
1. 提示: 利用“ SAS ”证明 $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ (其中 $CB = BC$).

2. 提示: 由 AC 平分 $\angle BAD$, 得 $\angle DAC = \angle BAC$, 利用“ SAS ”证明 $\triangle DAC \cong \triangle BAC$, 得到 $\angle DCA = \angle BCA$, 即 AC 平分 $\angle BCD$.

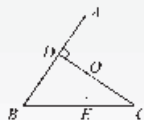
3. (1) $\angle A = \angle D$, $BC = EF$;

(2) $AD = CE$, $OD = OE$,

$AO = CO$.



(第3(1)题)



(第3(2)题)

(2) 已知: 如图, AE 和 CD 相交于点 O , $\angle ADO = \angle CEO = 90^\circ$. 要证明 $\triangle AOD \cong \triangle COE$, 只需再增添一个条件: _____ = _____, 或 _____ = _____, 或 _____ = _____.

^[1] 找出全等三角形的对应元素, 是判定和运用全等三角形的关键. 对位置不同的全等三角形来说, 如果已知某些边相等或某些角相等, 则确定对应边和对应角的办法是: 只有相等的边或角才可以是对应边或对应角; 对其他的边或角来说, 对应边的对角是对应角, 对应角的对边是对应边; 两条对应边的夹角是对应角, 两个对应角的夹边是对应边. 另外, 一般地, 全等三角形的公共边是对应边, 公共角是对应角, 对顶角是对应角. 教学时, 应注意从不同的角度加强训练. 教学中还要注意防止学生把对角与对应角、对边与对应边混为一谈. 此外, 两个任意的三角形之间无所谓谁是对应角, 谁是对应边.

^[2] 证明过程如下:

$$\because \angle ACB = 180^\circ - \angle 3, \angle ADB = 180^\circ - \angle 4, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ADB.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中, $\because \angle ACB = \angle ADB, \angle 1 = \angle 2, AB = AB,$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (AAS)}.$$

$$\therefore AC = AD \text{ (全等三角形的对应边相等)}.$$

例2 已知: 如图 10-3, 点 B 在 $\angle EAF$ 的内部, C, D 两点分别在 $\angle EAF$ 的两边上, 且 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$.

求证: $AC = AD$.

证明: $\because \angle 5 = \angle 3 - \angle 1, \angle 6 = \angle 4 - \angle 2,$

$$\angle 3 = \angle 4, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6.$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\because \angle 5 = \angle 6, AB = AB, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ (ASA)}.$$

$$\therefore AC = AD \text{ (全等三角形的对应边相等)}.^{[1]}$$

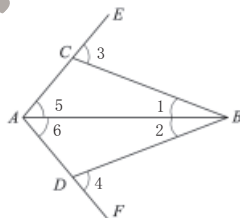


图 10-3

想一想

如何用上节课中的定理 (AAS) 证明例 2? ^[2]

例3 已知: 如图 10-4, $AB = CD, AB \parallel CD, CE = AF$.

求证: $\angle E = \angle F$. ^[3]

证明: $\because CE = AF,$

$$\therefore AC + CE = AC + AF,$$

$$\text{即 } AE = CF.$$

$$\because AB \parallel CD,$$

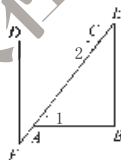


图 10-4

^[3] 例 2 和例 3 在判定两个三角形全等后, 进一步利用全等三角形的性质, 证明角相等或线段相等. 证明两线段相等或两角相等, 首先考虑两线段或两角分别在两个三角形内, 这两个三角形

$$\therefore \angle 1 = \angle 2.$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\therefore AE = CF, \angle 1 = \angle 2, AB = CD,$$

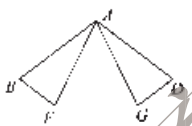
$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle E = \angle F \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

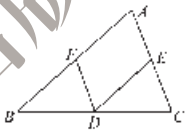
随堂练习

1. 已知: 如图, $AB = AD$, $AF = AG$, $BF = DG$.

求证: $\angle BAG = \angle DAF$.



(第1题)



(第2题)

2. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BF = DE$, $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$.

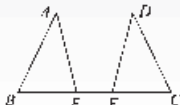
求证: D 为 BC 的中点.

习题 10.2

知识技能

1. 已知: 如图, 点 E, F 在线段 BC 上, $BF = CE$, $\angle AEB = \angle DFC$, $\angle B = \angle C$.

求证: $\triangle ABE \cong \triangle DCF$.



(第1题)



(第2题)

2. 已知: 如图, $AB = AC$, $\angle D = \angle E$, $\angle 1 = \angle 2$.

求证: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

是否可能是全等三角形, 若有可能则设法证明两个三角形全等. 这是一种基本的和重要的思考方法, 应让学生熟练掌握.

随堂练习

1. 提示: 先利用“SSS”基本事实证明 $\triangle ABF \cong \triangle ADG$, 得出 $\angle BAF = \angle DAG$, 所以 $\angle BAF + \angle FAG = \angle DAG + \angle FAG$, 即 $\angle BAG = \angle DAF$.

2. 提示: 由 $DE \parallel AB$, 得 $\angle B = \angle CDE$; 由 $DF \parallel AC$, 得 $\angle BDF = \angle C$; 又 $BF = DE$, 利用“AAS”证明 $\triangle BFD \cong \triangle DEC$, 从而可得结论.

习题 10.2

1. 提示: 由 $BF = CE$, 可得 $BE = CF$; 再利用“ASA”可证.

2. 提示: 由 $\angle 1 = \angle 2$, 可得 $\angle BAD = \angle CAE$; 再利用“AAS”可证.

3. 提示：连接 AC ，利用“SSS”可证。

[1] 对全等三角形来说，对应边相等和对应角相等的重要性质是证明两条线段相等和两个角相等的主要依据，因此，教学中应重视这一重要性质的教学。应当注意，由全等三角形的定义可知，全等三角形中的所有对应线段和对应角都是分别相等的。

例 4 和例 5 比前面的例题复杂一些，为了寻求证题思路，教科书在证明前通过卡通的形式给出了简单的分析。分析法是从结论入手，寻找结论成立的条件，然后把这些条件看作新的结论，再寻找新结论成立的条件，如此下去，直至由已知条件显然推得结论为止。这一思考方法，概括起来就是“执果索因”。分析法在寻求证题思路中起着十分重要的作用，今后将经常用到，要逐步使学生学会分析法。书写证明过程时用的是综合法，综合法的思考过程是由已知条件到结论，与分析法恰好相反。对于综合法，概括起来就是“由因导果”。通过例题教学，使学生学会用分析法寻求证题思路，然后用综合法书写证明过程。

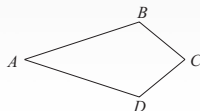
想一想

(1) 证明方法同例 4；

数学理解

3. 已知：如图， $AB=AD$ ， $BC=DC$ 。

求证： $\angle B=\angle D$ 。



(第 3 题)

[1] 例 4 已知：如图 10-5， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ， AD ， $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的高。

求证： $AD=A'D'$ 。

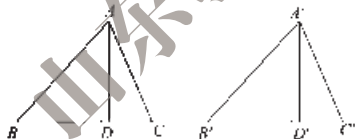


图 10-5

证明： $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore AB=A'B'$ （全等三角形的对应边相等），

$\angle B=\angle B'$ （全等三角形的对应角相等）。

$\because \angle ADB=\angle A'D'B'=90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ （AAS）。

$\therefore AD=A'D'$ （全等三角形的对应边相等）。

想一想

(1) 如果两个全等三角形对应边上的高在三角形的外部，你还能得到上面的结论吗？

- (2) 如果两个全等三角形对应边上的高就是该三角形的一条边呢?
 (3) 通过例 4 和上面的两个问题, 你能得到什么结论? 与同伴进行交流.

例 5 已知: 如图 10-6, $AB=CD$, $BE=DF$, $\angle B=\angle D$.

- 求证: (1) $AE=CF$;
 (2) $AE\parallel CF$;
 (3) $\angle AFE=\angle CEF$.^[1]

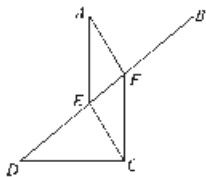


图 10-6

要证明两条线段(或两个角)相等, 可以通过这两条线段(或两个角)所在的两个三角形全等来证明.



证明: (1) 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\because AB=CD, \angle B=\angle D, BE=DF,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore AE=CF \text{ (全等三角形的对应边相等)}.$$

(2) $\because \triangle ABE \cong \triangle CDF$,

$$\therefore \angle AEB=\angle CFD \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

$$\therefore AE\parallel CF.$$

(3) 在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CFE$ 中,

$$\because AE=CF, \angle AEF=\angle CFE, EF=FE,$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CFE \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle AFE=\angle CEF \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

(2) 可直接利用全等三角形对应边相等得到;

(3) 全等三角形对应边上的高相等.

通过“想一想”, 还应让学生感悟: 若要证明“全等三角形对应边上的高相等”, 就需要分三种情况来证明. 这是一种分类讨论的思想, 可有意识地向学生渗透分类的思想方法.

^[1] 例 5 的解答, 需两次证明三角形全等. 应当注意, 前一次三角形全等的结论是后一次证明三角形全等的条件. 在教学中, 类似这样证明三角形全等一般不超过两次.

随堂练习

1. 已知: 如图, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, AD , $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线.

求证: $AD=A'D'$.

随堂练习

1. 提示: 由 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, 可得 $\angle B=\angle B'$, $AB=A'B'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$; 再由 AD , $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的角平分线, 可得 $\angle BAD=\angle B'A'D'$, 可证 $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ (ASA), 由此得 $AD=A'D'$.

2. 提示: (1) 先证 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS), 可得 $\angle B = \angle C$.

(2) 先证 $BE = CD$, 可证 $\triangle BEF \cong \triangle CDF$ (AAS).

(3) 由 (2) 易得 $BF = CF$.



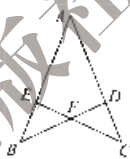
(第1题)

2. 已知: 如图, $AB = AC$, $AD = AE$, BD 和 CE 相交于点 F .

求证: (1) $\angle B = \angle C$;

(2) $\triangle BEF \cong \triangle CDF$;

(3) $BF = CF$.



(第2题)

习题10.3

1. 提示: 仿例 4, 注意写出已知、求证并画出相应图形, 利用“SAS”证明. 本题意在让学生通过模仿例 4 来感知一下文字题的证明格式, 为下节有关文字题的证明做铺垫.

2. 提示: 先证 $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ (SSS), 可得 $\angle B = \angle B'$, 再证 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (SAS).

3. 提示: 先证 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (AAS 或 ASA), 再证 $\triangle BOF \cong \triangle COE$ (ASA).

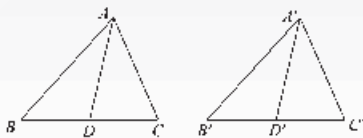
习题 10.3

知识技能

1. 求证: 全等三角形对应边上的中线相等.

2. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, AD , $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中线, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AD = A'D'$.

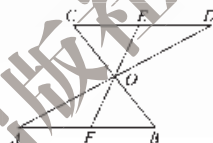
求证: (1) $\angle B = \angle B'$; (2) $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



(第2题)

3. 已知: 如图, $AB \parallel CD$, AD 和 BC 相交于点 O , EF 过点 O , 分别与 AB , CD 相交于点 F , E , $AB = CD$.

求证: (1) $OC = OB$; (2) $OE = OF$.



(第3题)

2 等腰三角形

还记得我们探索过的等腰三角形的性质吗？

试利用已有的基本事实和定理证明这些结论.^[1]

已知：如图 10-7，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$.

求证： $\angle B=\angle C$.^[2]



图 10-7



图 10-8



^[3] 我们曾经利用折叠的方法说明了等腰三角形的两个底角相等（如图 10-8）.

折痕将等腰三角形分成了两个全等三角形，因此通过作底边上的中线，可以得到两个全等的三角形，从而证明这两个底角相等.



几何图形. 学生在七年级上册曾经通过折纸等方法探索并发现了等腰三角形的性质，本节将对这些性质进行证明，同时还将探索并证明等腰三角形的判定定理.

^[1] 等腰三角形（包括等边三角形）的性质学生已经探索过，这里可先让学生尽可能回忆出来，然后再考察哪些能够立即证明.

^[2] 教学时教师要注意引导学生根据条件正确、规范地写出“已知”“求证”，有意识地培养学生对文字语言、符号语言和图形语言的转换能力，关注证明过程及其表达的合理性.

^[3] 这里让学生回忆以前的折纸过程，目的是引导学生发现证明的思路. 学生一般可以由折纸确定辅助线的位置，但对于作辅助线的规范叙述仍需教师帮助.

教学目标

1. 经历“探索—发现—猜想—证明”的过程，能够用综合法证明等腰三角形的性质定理和判定定理.

2. 掌握等腰三角形的性质和判定，掌握等边三角形的性质和判定，能灵活地运用它们进行论证.

3. 了解等腰三角形和等边三角形之间的关系，了解它们的性质定理和判定定理之间的关系.

4. 了解直角三角形中 30° 角所对的边等于斜边的一半的性质.

5. 结合实例体会反证法的含义.

本节的主要研究对象是等腰三角形和等边三角形. 教科书设计的流程大致是：证明等腰三角形、等边三角形的性质定理及判定定理→应用定理解决问题.

等腰三角形是一种常见的几何图形. 学生在七年级上册曾经通过折纸等方法探索并发现了等腰三角形的性质，本节将对这些性质进行证明，同时还将探索并证明等腰三角形的判定定理.

本章教科书中的证明过程没有详注理由,只注明了与本章研究内容相关的基本事实和本章出现的定理、推论.对此,教学时可根据学生的具体情况灵活处理.

^[1]教学中,应鼓励学生寻求其他证明方法.实际上,除作底边中线外,还可以通过作顶角平分线的方法证明结论,此时证明的依据是基本事实SAS.这两种证明方法都是受折纸的启发(轴对称),通过作辅助线将图形分成两部分,再证明这两部分全等.教师可以引导学生分析这两种证明方法的共性,加深对等腰三角形性质的认识.

教学时,可能会有学生通过作底边上的高并利用勾股定理来证明这一定理.对此,教师一方面要保护学生的学习积极性,另一方面也要引导学生认识到:我们虽然在以前探索并认识了勾股定理,但尚未用基本事实证明过,所以从逻辑上来说,勾股定理不能作为这里证明的依据.

此外,不添加辅助线也能证明“等边对等角”.如教科书图10-7,在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACB$ 中,

$$\because AB=AC, \angle A=\angle A, AC=AB,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACB \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

这一方法的技巧性较强,关键是把一个等腰三角形看成两个三角形.任何一个三角形都能与它本身重合,即一定有 $AB=AB$, $AC=AC$,但只有等腰三角形将图形沿对称轴翻转,所得到的图形与原图形重合,即 $AB=AC$, $AC=AB$.对于这一方法,教师可根据实际情况决定是否向学生介绍.

另外,应鼓励学生将自己的证明方法及自己对这种方法的理解与其他同学进行交流,从而使学生获得思维能力的提升.

证明:取底边 BC 的中点 D ,连接 AD (如图10-9).

$$\because AB=AC, BD=CD, AD=AD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD \text{ (SSS)}.$$

$$\therefore \angle B = \angle C \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

你还有其他证明方法吗?与同伴进行交流.^[1]



图 10-9

定理 等腰三角形的两个底角相等.

这一定理可以简述为:等边对等角.

实际上,在图10-9中,由 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,可以得到 $\angle BAD = \angle CAD$, $AD \perp BC$,因此线段 AD 同时还是顶角的平分线和底边上的高,由此可以得到结论:

定理 等腰三角形顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合.^[2]

议一议

前面已经证明了等腰三角形的两个底角相等.反过来,有两个角相等的三角形是等腰三角形吗?

如图10-10,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = \angle C$,要想证明 $AB = AC$,只要能构造两个全等的三角形,使 AB 与 AC 成为对应边就可以了.你是怎样构造的?^[3]



图 10-10

定理 有两个角相等的三角形是等腰三角形.

这一定理可以简述为:等角对等边.

^[2] 这一结论通常简述为“三线合一”，即如果某线段是一个等腰三角形的“三线”（顶角的平分线、底边上的中线、底边上的高线）之一，那么它必定也是这个等腰三角形的另“两线”。

议一议

这里应引导学生养成“反过来”思考问题的意识，即思考一个命题的逆命题的真假，因为这也是获得数学结论的一条途径。

^[3] 学生可能会由前面定理的证明获得启发，比如作 BC 的中线，或作 $\angle A$ 的平分线，或作 BC 上的高，教师应让学生思考判断哪一种方法可行（后两种方法是可行的），这是培养学生推理能力的好机会，也是学生体会从基本事实和已知定理出发进行推理的公理化思想的机会，教师应注意引导。教学中应鼓励学生按要求将推理证明过程书写出来。

随堂练习

- 提示：利用“SAS”证明.
- (1) $\angle BAD, \angle CAD, BD, CD$;
(2) $AD, BC, \angle BAD, \angle CAD$;
(3) AD, BC, BD, CD .

习题10.4

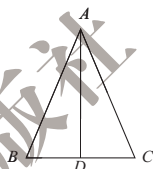
- (1) 提示：证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SAS);
(2) $\angle BAD = 90^\circ$.
- 提示：先证 $\angle A = \angle B$ ，再利用 $AB \parallel DC$ ，可证 $\angle C = \angle D$.
- $BC = 30 \text{ km}$.

随堂练习

- 利用作等腰三角形顶角的平分线的方法，证明等腰三角形的两个底角相等.
- 根据等腰三角形性质定理填空：

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$.

- $\because AD \perp BC$,
 $\therefore \angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$;
- $\because AD$ 是底边上的中线,
 $\therefore \underline{\hspace{1cm}} \perp \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$;
- $\because AD$ 是顶角的平分线,
 $\therefore \underline{\hspace{1cm}} \perp \underline{\hspace{1cm}}$, $\underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$.



(第2题)

习题 10.4

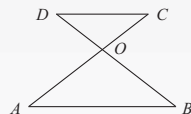
知识技能

- 如图，在 $\triangle ABD$ 中， C 是边 BD 上的一点，且 $AC \perp BD$, $AC = BC = CD$.

- 求证： $\triangle ABD$ 是等腰三角形；
- 求 $\angle BAD$ 的度数.



(第1题)



(第2题)

- 如图， AC 和 BD 相交于点 O ，且 $AB \parallel DC$, $OA = OB$.

求证： $OC = OD$.

问题解决

- 如图，一艘船从 A 处出发，以 20 km/h 的速度向正北方向航行，经过 1.5 h 到达 B 处. 分别从 A, B 处望灯塔 C ，测得 $\angle NAC = 42^\circ$, $\angle NBC = 84^\circ$. 求从 B 处到灯塔 C 的距离.



(第3题)

想一想

在等腰三角形中作出两底角的平分线，这两个底角的平分线相等吗？你能证明你的结论吗？

例1 证明：等腰三角形两底角的平分线相等。

已知：如图 10-11，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， BD ， CE 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。

求证： $BD=CE$ 。

证明： $\because AB=AC$ ，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$ （等边对等角）。

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$ ， $\angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB$ ，

$\therefore \angle 1=\angle 2$ 。

在 $\triangle BDC$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$\therefore \angle ACB=\angle ABC$ ， $BC=CB$ ， $\angle 1=\angle 2$ ，

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle CEB$ （ASA）。

$\therefore BD=CE$ （全等三角形的对应边相等）。

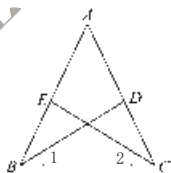


图 10-11

议一议

等腰三角形两条腰上的中线相等吗？两条腰上的高呢？请证明你的结论，并与同伴进行交流。^[1]

例2 已知：如图 10-12，点 D ， E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上， $AB=AC$ ， $AD=AE$ 。

求证： $BD=CE$ 。

分析：因为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是有公共顶点，并且底边在同一直线上的等腰三角形，所以作 $\triangle ABC$ （或 $\triangle ADE$ ）的高 AF ，可同时平分 BC ， DE 。^[2]

证明：作 $AF \perp BC$ ，垂足为点 F ，则 $AF \perp DE$ 。

$\therefore AB=AC$ ，

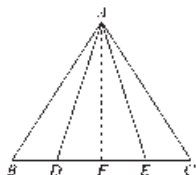


图 10-12

^[1] 利用“SAS”可证明等腰三角形两腰上的中线相等；利用“AAS”可证明等腰三角形两腰上的高相等。

^[2] 等腰三角形底边上的三条主要线段重合的性质（即“三线合一”），是等腰三角形的重要性质，学生在运用时容易出现错误。应向学生指出，该定理成立的条件是：（1）三角形中有两边相等；（2）三角形中的一条线段为三条主要线段之一：顶角的平分线或底边上的中线或底边上的高。只有具备这两个条件，才能得出这条线段也是其他两条主要线段的结论。

想一想

先让学生经过自己的观察、探索发现等腰三角形两底角的平分线相等，再引导他们去证明。这里应让学生进一步体会证明的必要性。

例1

对于本例，教科书作为指导学生的范例给出了规范的证明。

例1是文字题，即证明用语言表述的一个数学命题。由于它包括了证明一个几何命题的完整过程，从分析条件、结论，根据题设画图，用符号语言写出已知、求证，直到完成证明，每一部分都有难度，所以学生开始接受时会感到有一定困难。为解决这个难点，首先要指导学生将条件和结论转化为几何语言，写出已知、求证并画出图形。

$\therefore BF=CF$ (等腰三角形底边上的中线、底边上的高互相重合).

同理, $\therefore AD=AE$,

$\therefore DF=EF$.

$\therefore BF-DF=CF-EF$,

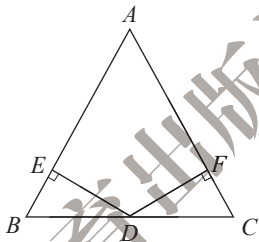
即 $BD=CE$.

《《 随堂练习

- 提示: 先由 $DB=DC$, 证明 $\angle DBC=\angle DCB$, 再证 $\angle ABC=\angle ACB$.
- 提示: 由 $\angle 1=\angle B$, $\angle 2=\angle C$, 可得 $\angle B=\angle C$.

《《 习题10.5

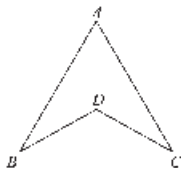
- 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 是边 BC 的中点, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为点 E, F .
求证: $DE=DF$.
证明: 可利用“ AAS ”证 $\triangle BED \cong \triangle CFD$.



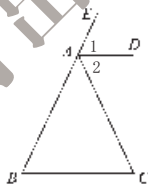
- 提示: 先利用“ SSS ”证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$, 得 AE 是等腰三角形 ABC 的顶角的平分线, 从而 AE 也是底边 BC 上的中线.
- 提示: (1) 证明 $\angle OBC=\angle OCB$;
(2) 证明 $\triangle BCD \cong \triangle CBE$.

《《 随堂练习

- 已知: 如图, D 是 $\triangle ABC$ 内的一点, BD 平分 $\angle ABC$, CD 平分 $\angle ACB$, 且 $BD=CD$.
求证: $AB=AC$.



(第1题)



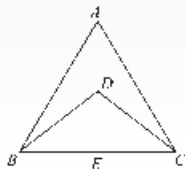
(第2题)

- 已知: 如图, $\angle CAE$ 是 $\triangle ABC$ 的外角, $AD \parallel BC$, 且 $\angle 1=\angle 2$.
求证: $AB=AC$.

《《 习题 10.5

《《 知识技能

- 求证: 等腰三角形底边的中点到两腰的距离相等.
- 已知: 如图, $AB=AC$, $DB=DC$, AD 的延长线交 BC 于点 E .
求证: $BE=CE$.



(第2题)



(第3题)

- 已知: 如图, $AB=AC$, $\angle ABD=\angle ACE$.
求证: (1) $OB=OC$; (2) $BE=CD$.

议一议

(1) 一个等腰三角形满足什么条件时便成为等边三角形?

(2) 你认为有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形吗? 你能证明你的结论吗? 把你的证明思路与同伴进行交流.

定理 有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形.

做一做

你还记得用两个含 30° 角的三角尺拼出一个等边三角形吗? 我们曾用拼出的图形得到直角三角形中 30° 角所对的直角边与斜边的大小关系, 你能证明你的结论吗?

[1] 已知: 如图 10-13 (1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$.

求证: $BC = \frac{1}{2}AB$.

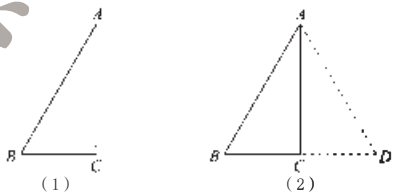


图 10-13

证明: 延长 BC 至点 D , 使 $CD = BC$, 连接 AD (如图 10-13 (2)).

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ.$$

$$\because AC = AC, \angle ACB = \angle ACD, BC = DC,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore AB = AD \text{ (全等三角形的对应边相等)},$$

$$\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

做一做

教科书设计了一个学生拼摆三角尺的活动, 让学生通过活动发现结论. 同时教师应引导学生意识到, 通过实际操作探索出来的结论还需要给予证明. 在证明这个结论时, 辅助线的作法可以从三角尺的拼摆过程中得到启发, 教师应在这方面给予学生更多的点拨.

[1] 需要说明的是, 教科书中给出的证法并不是最简捷的. 比如, 可以延长 BC 到 D , 使 $BD = AB$, 连接 AD .

由前面的定理可知 $\triangle ABD$ 是等边三角形. 由 $AC \perp BC$, 可知 $BC = CD = \frac{1}{2}AB$.

但这种证明的思路不易想出, 而教材所给思路可由拼摆三角尺直观得出.

议一议

教学时, 也可以让学生首先考虑一个更为开放的问题:

“一个三角形满足什么条件时便成为等边三角形?” 如果有学生提出“三个角都相等的三角形是等边三角形”, 那么最好先证明这一结论 (随堂练习第 3 题), 为下面的证明做铺垫.

(1) 先让学生自主探索、思考等腰三角形成为等边三角形的条件, 教师不要用直接给出结论的方式代替学生的思考.

(2) 这个结论的证明对学生来说可能有一定的难度, 难点是要意识到分别讨论 60° 的角是底角和顶角的情况, 这是一种分类讨论的思想. 教师要关注学生得出证明思路的过程, 引导学生全面、周到地思考问题, 并有意识地向学生渗透分类的思想方法.

教学时，应在证明前让学生思考证明思路，鼓励学生提出不同的证明思路，然后通过交流使全体学生受益。

^[1] 这一定理的逆命题也是成立的（参见 P114 第 3 题）。

$$\therefore \angle BAD = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形（有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形）。

$$\therefore BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB.$$

由此可以得出下面的定理：

定理 在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半。^[1]

例 3 等腰三角形的底角为 15° ，腰长为 $2a$ ，求腰上的高。

如图 10-14，在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB = AC = 2a$ ， $\angle ABC = 15^\circ$ ， CD 是腰 AB 上的高。求 CD 的长。

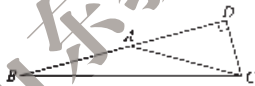


图 10-14

解： $\because AB = AC$,

$$\therefore \angle ACB = \angle ABC = 15^\circ.$$

$$\begin{aligned} \therefore \angle DAC &= \angle ABC + \angle ACB \\ &= 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ. \end{aligned}$$

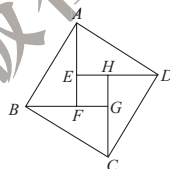
$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2a = a$ （在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的直角边等于斜边的一半）。

随堂练习

1. 边长为 $2\sqrt{3} - 2$.

随堂练习

1. 直角三角形的一个角等于 30° ，斜边长为 4，用四个这样的直角三角形拼成如图所示的正方形，求正方形 $EFGH$ 的边长。



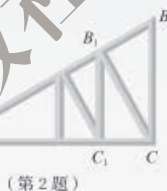
（第 1 题）

2. 证明: 等边三角形的三个角都相等, 并且每个角都等于 60° .
 3. 证明: 三个角都相等的三角形是等边三角形.

习题 10.6

知识技能

1. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $DE \parallel BC$, 分别交 AB, AC 于点 D, E .
 求证: $\triangle ADE$ 是等边三角形.



问题解决

2. 一架直角三角形房梁如图所示, 其中 $BC \perp AC$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 10 \text{ m}$, $CB_1 \perp AB$, $B_1C_1 \perp AC$, 垂足分别为 B_1, C_1 , 那么 BC 的长是多少? B_1C_1 呢?

联系拓广

3. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, 过它的三个顶点分别作对边的平行线, 得到一个新的三角形 DEF , $\triangle DEF$ 是等边三角形吗? 你还能找到其他的等边三角形吗? 请证明你的结论.



2. 提示: 利用“等边对等角”定理及三角形内角和定理.
 3. 提示: 利用“等角对等边”定理.

习题 10.6

1. 证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle A = \angle B = \angle C$ (等边三角形的三个角都相等).

$$\because DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle B,$$

$$\angle AED = \angle C.$$

$$\therefore \angle A = \angle ADE = \angle AED.$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 是等边三角形}$$

(三个角都相等的三角形是等边三角形).

2. $BC = 5 \text{ m}$, $B_1C_1 = 3.75 \text{ m}$. 本题要求解途径不唯一, 教师应鼓励学生解法的多样化.

3. $\triangle DEF$ 是等边三角形;
 $\triangle ABE$, $\triangle ACF$, $\triangle BCD$ 也都是等边三角形.

提示: 利用平行关系寻找角之间的关系.

例 4

本例综合应用了全等三角形的判定定理和等腰三角形的判定定理. 在解答过程中, 教师应关注学生的思考过程, 引导学生分析解决问题的方法.

想一想

从直观上看, 学生不难得出结论. 但这里要求学生不仅能借助直观得出结论, 而且还要能够证明它, 也就是要让学生体会证明的必要性. 对这一点的认识, 是本章对学生的要求, 而这个问题的证明方法——反证法, 是这里要介绍的一种证明方法. 虽然反证法是一种重要的证明方法, 但根据《标准》的要求, 只需通过实例了解它的含义即可.

命题“在一个三角形中, 如果两个角不相等, 那么这两个角所对的边也不相等”是真命题. 实际上, 在一个三角形中, 除了“等角对等边, 等边对等角”之外, 还有“大角对大边, 大边对大角”“小角对小边, 小边对小角”. 需要注意的是, 设置这个“想一想”的主要意图是引入反证法, 因此教学时不必在这些具体结论上大做文章, 以免冲淡主题.

例 4 已知: 如图 10-15, $AB=DC$, $BD=CA$.

求证: $\triangle AED$ 是等腰三角形.

证明: $\because AB=DC$, $BD=CA$, $AD=DA$,

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCA$ (SSS),

$\therefore \angle ADB = \angle DAC$ (全等三角形的对应角相等).

$\therefore AE=DE$ (等角对等边).

$\therefore \triangle AED$ 是等腰三角形.

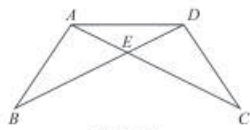


图 10-15

想一想

小明说: “在一个三角形中, 如果两个角不相等, 那么这两个角所对的边也不相等.” 你认为这个结论成立吗? 如果成立, 你能证明它吗?

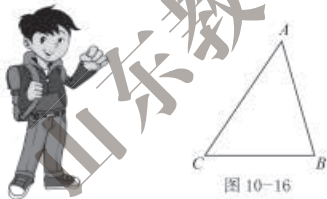


图 10-16

小明是这样想的:

如图 10-16, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle B \neq \angle C$, 此时 AB 与 AC 要么相等, 要么不相等.

假设 $AB=AC$, 那么根据“等边对等角”定理可得 $\angle C = \angle B$, 但已知条件是 $\angle B \neq \angle C$, “ $\angle C = \angle B$ ”与已知条件“ $\angle B \neq \angle C$ ”相矛盾, 因此 $AB \neq AC$.

你能理解他的推理过程吗?

小明在证明时, 先假设命题的结论不成立, 然后推导出与定义、基本事实、已有定理或已知条件相矛盾的结果, 从而证明命题的结论一定成立. 这种证明方法称为反证法 (reduction to absurdity).

[1] 反证法属于间接证明方法, 是从反面思考问题的证明方法. 具体来说, 反证法就是从否定命题的结论入手, 并把对命题结论的否定也作为推理的已知条件, 进行正确的逻辑推理, 使之得到与已知条件、基本事实、定理、法则或者已经证明为正确的命题等相矛盾的结果, 出现矛盾的原因是因为否定了命题的结论, 从而使命题获得了证明. 反证法所依据的是逻辑思维规律中的“矛盾律”和“排中律”. 在同一思维过程中, 两个互相矛盾的判断不能同时都为真, 至少有一个是假的, 这就是逻辑思维中的“矛盾律”; 两个互相矛盾的判断不能同时都假, 这就是逻辑思维中的“排中律”.

用反证法证明的一般步骤是：

(1) 假设命题的结论不成立；

(2) 从这个假设出发，应用正确的推理方法，得出与定义、基本事实、已证定理或已知条件相矛盾的结果；

(3) 由矛盾的结果判定假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

议一议

假设这五个数没有一个大于或等于 $\frac{1}{5}$, 即都小于 $\frac{1}{5}$, 则五个数的和小于 1. 这与已知五个数的和等于 1 矛盾, 所以这五个数中至少有一个大于或等于 $\frac{1}{5}$.

设置本问题是为了让学生更多地了解反证法的作用. 利用反证法证明的关键是要确定结论的反面是什么, 然后寻求矛盾的结果. 对于本问题, 需要正确理解“至少有一个”“大于或等于”的反面的含义.

随堂练习

1. 等腰三角形. 提示: 证明 $\angle EBD = \angle EDB$, 再应用“等角对等边”定理.
2. 结论: 一个三角形中最多有一个钝角.

已知: $\triangle ABC$.

求证: $\angle A, \angle B, \angle C$ 中最多有一个钝角.

证明: 思路和方法与“议一议”相同.

议一议

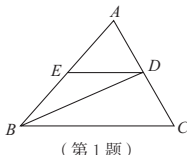
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 都是正数, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, 那么这五个数中至少有一个大于或等于 $\frac{1}{5}$.

如何证明这一结论呢?

假设这五个数中没有一个大或等于 $\frac{1}{5}$, 即都小于 $\frac{1}{5}$, 那么你能推出什么结果? 这一结果与已知条件是否矛盾?

随堂练习

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 平分 $\angle ABC$, 交 AC 于点 D , 过点 D 作 $DE \parallel BC$, 交 AB 于点 E . 请判断 $\triangle BDE$ 的形状, 并说明理由.
2. 一个三角形中最多有几个钝角? 为什么?



读一读

反证法

反证法是一种独特的证明方法, 它的独特之处有两点: 一是否定命题的结论, 并且可以将这个否定的结论作为证明的条件; 二是从这个新条件出发, 结合命题原有的条件一起推出矛盾, 从而使问题获证. 与运用其他方法证明一样, 运用反证法证明时, 推理的过程必须有理有据.

反证法在日常生活和数学证明中应用非常广泛. 例如, 在本册《平行线的有关证明》中曾经用反证法证明了平行线的性质“两直线平行, 同位角相等”, 在七年级上册读一读“无理数的发现”中曾经用它说明边长为 1 的正方形的对角线长 (即 $\sqrt{2}$) 不是有理数.

我们再看一个用反证法证明的例子.

证明: 一个三角形中至多有一个直角.

已知: $\triangle ABC$.

求证: $\angle A, \angle B, \angle C$ 中至多有一个直角.

证明: 假设 $\angle A, \angle B, \angle C$ 中有两个或三个直角, 不妨设 $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 则 $\angle A + \angle B + \angle C = 90^\circ + 90^\circ + \angle C > 180^\circ$.

这与三角形内角和定理矛盾. 故 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ 不成立.

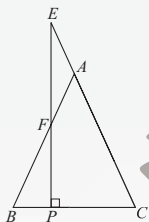
所以一个三角形中至多有一个直角.

试一试, 你能用反证法证明“两条直线相交只有一个交点”吗?

习题 10.7

知识技能

1. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, E 在 CA 的延长线上, $EP \perp BC$, 垂足为 P , EP 交 AB 于点 F .
求证: $\triangle AEF$ 是等腰三角形.



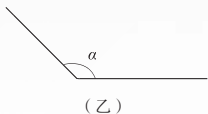
(第1题)

数学理解

2. (1) 已知: 如图(甲), 等腰三角形的一个内角为锐角 α , 腰长为 a , 求作这个等腰三角形;



(甲)



(乙)

(第2题)

- (2) 在(1)中, 把锐角 α 变成钝角 α (如图(乙)), 其他条件不变, 求作这个等腰三角形.

联系拓广

- ※3. 仿照小明的想法, 用反证法证明: 在一个三角形中, 如果两条边不相等, 那么这两条边所对的角也不相等.

习题 10.7

1. 提示: 由 $AB = AC$, 可知 $\angle B = \angle C$; 由 $\angle E$ 与 $\angle C$ 互余, $\angle B$ 与 $\angle BFP$ 互余, 得 $\angle E = \angle BFP$; 进而可得 $\angle E = \angle EFA$. 还可以作 $\triangle ABC$ 底边 BC 上的高 AD , 得 $\angle E = \angle CAD$, $\angle EFA = \angle BAD$; 根据“三线合一”可知 $\angle CAD = \angle BAD$, 所以 $\angle E = \angle EFA$.

2. (1) 提示: 这样的等腰三角形有两个, 一个以 $\angle \alpha$ 为顶角, 另一个以 $\angle \alpha$ 为底角;

- (2) 提示: 这样的等腰三角形只有一个, 即以 $\angle \alpha$ 为顶角的等腰三角形.

3. 提示: 假设这两条边所对的角相等, 那么根据“等角对等边”定理, 可得这两条边相等, 这与已知条件“两条边不相等”相矛盾.

教学目标

1. 进一步掌握推理证明的方法, 发展演绎推理能力.

2. 了解勾股定理及其逆定理的证明方法, 能够证明直角三角形全等的“HL”判定定理.

3. 结合具体例子了解逆命题的概念, 会识别两个互逆命题, 知道原命题成立其逆命题不一定成立.

[1] 以前我们曾经利用图形割补的方法验证了勾股定理, 而此处对勾股定理的证明应以我们认定的几条基本事实和由此推出的定理为依据进行. 虽然证明的方法有多种, 但对于学生来说, 这些证明都有一定难度, 因此教科书没有在正文中给出证明过程, 而将其中的两种证明方法放在本节的“读一读”中, 以供有兴趣的学生阅读, 不要求所有学生都掌握.

[2] 勾股定理的逆定理的证明方法对学生来说也是有一定难度的, 因此只要学生能接受证明的方法和过程即可, 不宜提出更高的要求.

3 直角三角形

我们曾经利用数方格和割补图形的方法得到了勾股定理. 实际上, 我们能够证明勾股定理 (有关证明过程参见本节“读一读”). [1]

勾股定理 直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方.

反过来, 在一个三角形中, 当两边的平方和等于第三边的平方时, 我们曾用度量的办法得出“这个三角形是直角三角形”的结论. 你能证明这个结论吗? [2]

已知: 如图 10-17 (1), 在 $\triangle ABC$ 中, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.

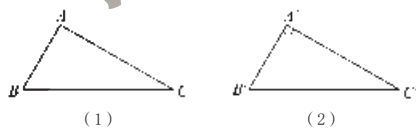


图 10-17

证明: 作 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$, 使 $\angle A' = 90^\circ$, $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ (如图 10-17 (2)), 则

$$A'B'^2 + A'C'^2 = B'C'^2 \quad (\text{勾股定理}).$$

$$\because AB^2 + AC^2 = BC^2, A'B' = AB, A'C' = AC,$$

$$\therefore BC^2 = B'C'^2.$$

$$\therefore BC = B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \quad (\text{SSS}).$$

$$\therefore \angle A = \angle A' = 90^\circ \quad (\text{全等三角形的对应角相等}).$$

因此, $\triangle ABC$ 是直角三角形.

定理 如果三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么这个三角形是直角三角形.

议一议

观察上面两个定理,它们的条件和结论之间有这样的关系?与同伴进行交流.

再观察下面三组命题:

- 如果两个角是对顶角,那么它们相等;
- 如果两个角相等,那么它们是对顶角.
- 如果小明患了肺炎,那么他一定会发烧;
- 如果小明发烧,那么他一定患了肺炎.
- 一个三角形中相等的边所对的角相等;
- 一个三角形中相等的角所对的边相等.

上面每组中两个命题的条件和结论也有类似的关系吗?与同伴进行交流.

在两个命题中,如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件,那么这两个命题称为**互逆命题**,其中一个命题称为另一个命题的**逆命题**.

想一想

你能写出命题“如果两个有理数相等,那么它们的平方相等”的逆命题吗?它们都是真命题吗?

一个命题是真命题,它的逆命题不一定是真命题.如果一个定理的逆命题经过证明是真命题,那么它也是一个定理,其中一个定理称为另一个定理的**逆定理**.

例如,上面的定理即为勾股定理逆定理,“两直线平行,内错角相等”是“内错角相等,两直线平行”的逆定理.你还能举出一些例子吗?^[1]

^[1] 如“全等三角形的对应边相等”和“三边对应相等的三角形是全等三角形”;“两直线平行,同位角相等”和“同位角相等,两直线平行”等.

议一议

教科书通过几对数学和生活中的命题,让学生观察这些成对命题的结论与条件之间的关系,希望学生归纳出它们的共性来,以得到“互逆命题”的概念.

将一个命题的条件与结论互换,就得到这个命题的逆命题.相对于逆命题来说,原来的命题叫做原命题.原命题与逆命题是互逆关系,因而是相对的.原命题正确,逆命题不一定正确.

想一想

这个命题的条件和结论都比较明显、简单,写出其逆命题对学生来说应该没有什么问题,关键是让学生验证逆命题的正确性,并能意识到一对互逆命题的真假性不一定一致.

随堂练习

- $AB = 3\sqrt{2}$.
- (1) 多边形是四边形；真；假.
(2) 同旁内角互补，两直线平行；真；真.
(3) 如果 $a = 0$, $b = 0$, 那么 $ab = 0$; 假；真.

互逆命题和互逆定理的概念，学生接受起来应不会有什么困难，尤其是对于以“如果……那么……”的形式给出的命题，写出其逆命题较为容易，但对于那些不是以这种形式给出的命题，叙述其逆命题会有一定困难，如本题的 (1) (2). 教师可帮助学生分析命题的条件和结论，但注意不要对这种形式的较复杂的命题做更多的练习.

- 提示： $BD^2 - CD^2 = BC^2$, $AB^2 - AC^2 = BC^2$.

随堂练习

- 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $BC = 3$, 求 AB 的长.
- 说出下列命题的逆命题，并判断每对命题的真假：
(1) 四边形是多边形；
(2) 两直线平行，同旁内角互补；
(3) 如果 $ab = 0$, 那么 $a = 0$, $b = 0$.
- 已知：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$, D 为边 AC 上的任意一点. 求证： $BD^2 + AC^2 = CD^2 + AB^2$.

读一读

勾股定理的证明

利用教科书给出的基本事实和已有定理，我们可以证明勾股定理.

如图 10-18 (1)，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

分别以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边为边长向外作正方形 $ACDE$, $CBFG$, $ABIH$ (如图 10-18 (2)).

连接 EB , CH . 作 $CM \perp AB$, 并延长 CM 与 HI 交于点 N (如图 10-18 (2)). 可以证明：

在 $\triangle EAB$ 和 $\triangle CAH$ 中，
 $\because EA = CA$ (四边形 $ACDE$ 是正方形)，
 $AB = AH$ (四边形 $ABIH$ 是正方形)，
 $\angle EAB = 90^\circ + \angle CAB = \angle CAH$,

$\therefore \triangle EAB \cong \triangle CAH$,

$S_{\text{正方形}ACDE} = 2S_{\triangle EAB}$, $S_{\text{长方形}AHNM} = 2S_{\triangle CAH}$,

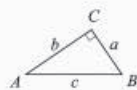
$\therefore b^2 = S_{\text{长方形}AHNM}$.

同理 $a^2 = S_{\text{长方形}MNIB}$.

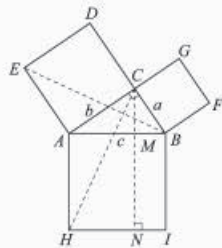
$\therefore c^2 = a^2 + b^2$.

以上是欧几里得在《原本》中证明勾股定理的大致过程.

勾股定理是数学史上非常重要的定理之一. 两千多年来，人们对它进行了大量的研



(1)



(2)

图 10-18

读一读

这里介绍的证明方法用到了全等三角形和面积公式，与以前介绍的拼图方法相比，更为严密.

究, 给出了多达数百种的证明方法. 如果你有兴趣, 可查阅有关资料, 了解勾股定理的其他证明方法.

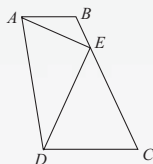
习题 10.8

知识技能

1. 已知: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=13$ cm, $BC=10$ cm, BC 边上的中线 $AD=12$ cm.

求证: $AB=AC$.

2. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, E 为 BC 上的一点, 且 $\angle BAE=25^\circ$, $\angle CDE=65^\circ$, $AE=2$, $DE=3$, 求 AD 的长.

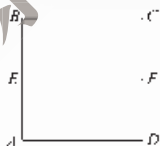


(第2题)

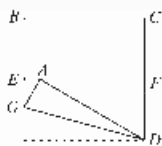
联系拓广

※3. 命题“在直角三角形中, 如果一条直角边等于斜边的一半, 那么这条直角边所对的锐角等于 30° ”是真命题吗? 如果是, 请你证明它.

※4. 如图(1), $ABCD$ 是一张正方形纸片, E, F 分别为 AB, CD 的中点, 沿过点 D 的折痕将 A 角翻折, 使得点 A 落在 EF 上 (如图(2)), 折痕交 AE 于点 G , 那么 $\angle ADG$ 等于多少度? 你能证明你的结论吗? (提示: 利用第3题的结论.)



(1)



(2)

(第4题)

[1] 两边分别相等且其中一组等边的对角相等的两个三角形全等吗? 如果其中一组等边所对的角是直角呢?

做一做

已知一条直角边和斜边, 求作一个直角三角形.

[1] 学生在七年级上册已经尝试过已知三角形的两边及其中一边的对角画三角形, 知道画出的三角形不唯一. 教科书从这里引入, 通过动手操作, 探索发现直角三角形特殊的全等条件.

教学时, 如果有学生提出仿照七年级上册探索三角形全等条件的方法, 通过赋予两边特殊值、画直角三角形、与同伴所画的直角三角形进行比较, 进而归纳出结论, 教师也应给予鼓励. 同时, 教师可由此引导学生考虑用尺规一般地作出直角三角形, 从而转入下面“做一做”环节.

习题 10.8

1. 提示: 证明 $\triangle ABD$ 是直角三角形, 得 $\angle ADB = 90^\circ$, 然后在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中求得 $AC = 13$ cm.

2. $AD = \sqrt{13}$.

提示: 通过两锐角互余, 证明 $\triangle AED$ 为直角三角形, 再运用勾股定理计算 AD 的长.

3. 是真命题. 辅助线的作法与图 10-13(2) 类似.

4. $\angle ADG = 15^\circ$.

做一做

要求学生依据给定的线段 a, c , 用尺规作出直角三角形, 通过与同伴交流, 比较大大家所作出的三角形是否能够重合, 获得判断直角三角形全等的特殊条件. 教学时, 教师应鼓励学生先自主思考这一尺规作图的方法, 对有困难的学生进行必要的指导, 然后通过交流使所有学生理解这一作图步骤.

教科书借助小明呈现了这一尺规作图的具体作法, 要求学生保留作图痕迹, 不要求写作法.

在完成作图后, 引导学生用数学语言归纳、概括由此获得的猜想.

^[1] 由猜想得到的命题只有经过证明才能成为定理. 教学时要让学生体会证明的必要性.

已知: 如图 10-19, 线段 a, c ($a < c$), 直角 α .



图 10-19

求作: $\text{Rt}\triangle ABC$, 使 $\angle C = \angle \alpha$, $BC = a$, $AB = c$.

小明的作法如下:

(1) 作 $\angle MCN = \angle \alpha = 90^\circ$.



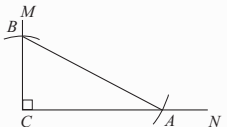
(2) 在射线 CM 上截取 $CB = a$.



(3) 以点 B 为圆心, 线段 c 的长为半径作弧, 交射线 CN 于点 A .



(4) 连接 AB , 得到 $\text{Rt}\triangle ABC$.



你作的直角三角形与小明作的全等吗?^[1]

定理 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等.

这一定理可以简单地用“斜边、直角边”或“HL”表示.

已知: 如图 10-20, 在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle C = \angle C' = 90^\circ$, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

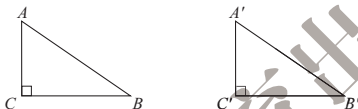


图 10-20

[1] 证明: 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 - AC^2 \text{ (勾股定理)}.$$

同理, $B'C'^2 = A'B'^2 - A'C'^2$.

$$\therefore AB = A'B', AC = A'C',$$

$$\therefore BC = B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ (SSS)}.$$

例 如图 10-21, 有两个长度相等的滑梯, 左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的长度 DF 相等, 两个滑梯的倾斜角 $\angle B$ 和 $\angle F$ 的大小有什么关系?

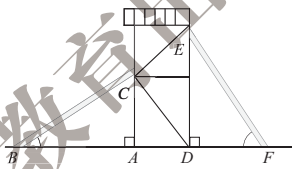


图 10-21

解: 根据题意, 可知

$$\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ,$$

$$BC = EF, AC = DF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BAC \cong \text{Rt}\triangle EDF \text{ (HL)}.$$

$$\therefore \angle B = \angle DEF \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

$$\therefore \angle DEF + \angle F = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle F = 90^\circ.$$

[1] 证明这一定理的思路是: 由勾股定理得出另一条直角边相等, 再根据基本事实 SSS 判定两个三角形全等.

至此, 学生经历了定理的发现、提出和证明的全过程, 感受了合情推理与演绎推理的紧密关系.

例

教科书设计了一个利用“斜边、直角边”定理解决的实际问题, 使学生体会数学结论在实际中的应用. 教学中应要求学生能用数学语言清楚地表达自己的想法, 并能将解题过程规范地书写出来.

随堂练习

1. 判断下列命题的真假, 并说明理由:

- (1) 两个锐角分别相等的两个直角三角形全等;

随堂练习

1. (1) 假. 教师应让学生体会举反例的作用.

(2) 真. 满足 AAS 定理的条件.

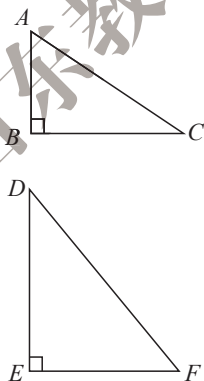
(3) 真. 满足基本事实 ASA 的条件.

(4) 真. 先利用 HL 定理得到另一条直角边相等, 再根据基本事实 SAS 判定两个三角形全等.

2. 提示：证明 $\text{Rt}\triangle CDE \cong \text{Rt}\triangle BDF$ ，得 $\angle C = \angle B$ 。
3. 相等. 利用 HL 定理判定两直角三角形全等.

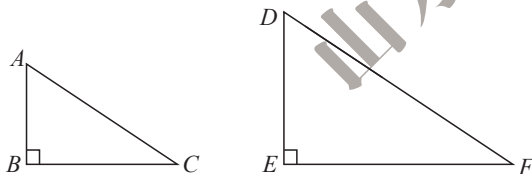
习题 10.9

1. (1) 假. 如在下图中的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $AC = DE$ ， $BC = EF$ ，但这两个直角三角形不全等.



(第 1 (1) 题)

- (2) 假. 如在下图中的 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中， $\angle A = \angle D$ ， $AC = DE$ ，但这两个直角三角形不全等.



(第 1 (2) 题)

设计本题是为了深化对直角三角形全等的判定方法的理解.

在第 (1) 题中，若相等的是两直角边，则可由基本事实 SAS 判定两个直角三角形全等；若斜边相等，一直角边相等，则可由 HL 定理判定两个直角三角形全等；若一个直角三角形的斜边等

(2) 斜边及一锐角分别相等的两个直角三角形全等；

(3) 两条直角边分别相等的两个直角三角形全等；

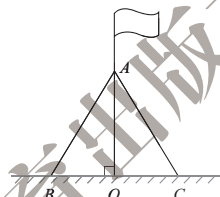
(4) 一条直角边相等且另一条直角边上的中线相等的两个直角三角形全等.

2. 已知：如图， D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点， $DE \perp AC$ ， $DF \perp AB$ ，垂足分别为点 E ， F ，且 $DE = DF$.

求证： $\triangle ABC$ 是等腰三角形.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，两根长度为 12 m 的绳子，一端系在旗杆上，另一端分别固定在地面的两个木桩上，两个木桩离旗杆底部的距离相等吗？请说明你的理由.

习题 10.9

知识技能

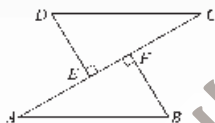
1. 判断下列命题的真假，并说明理由：

(1) 两边分别相等的两个直角三角形全等；

(2) 一个锐角和一条边分别相等的两个直角三角形全等.

2. 已知：如图， $AB = CD$ ， $DE \perp AC$ ， $BF \perp AC$ ，垂足分别为点 E ， F ， $DE = BF$.

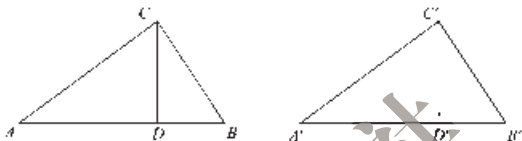
求证：(1) $AE = CF$ ；(2) $AB \parallel CD$.



(第 2 题)

数学理解

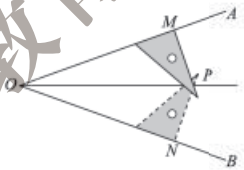
3. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $\angle ACB = \angle A'C'B' = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $C'D' \perp A'B'$, 垂足分别是点 D, D' , 并且 $CD = C'D'$, $AC = A'C'$.
求证: (1) $\angle A = \angle A'$; (2) $AB = A'B'$.



(第3题)

问题解决

4. 用三角尺可以画角平分线: 如图所示, 在已知 $\angle AOB$ 的两边上分别取点 M, N , 使 $OM = ON$, 再过点 M 画 OA 的垂线, 过点 N 画 OB 的垂线, 两垂线交于点 P , 那么射线 OP 就是 $\angle AOB$ 的平分线. 请你证明 OP 平分 $\angle AOB$.



(第4题)

4 线段的垂直平分线

我们曾经利用折纸的办法得到: 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等. 你能证明这一结论吗? 试一试.^[1]

已知: 如图 10-22, 直线 $MN \perp AB$, 垂足是点 C , 且 $AC = BC$, P 是 MN 上的任意一点.^[2]

教学目标

1. 经历探索、猜测、证明的过程, 进一步体会证明的必要性, 增强证明意识和能力.
2. 证明线段垂直平分线的性质定理, 探索并证明线段垂直平分线的判定定理, 进一步发展推理能力.
3. 能运用线段垂直平分线的性质定理和判定定理解决问题.
4. 已知底边及底边上的高, 能用尺规作出等腰三角形; 能用尺规过一点作已知直线的垂线.

^[1] 应先让学生自己思考证明的思路和方法, 并尝试写出证明过程.

^[2] 教科书是在线段垂直平分线上任取一点 P 证明这一定理的. 要证明一个图形上每一点都具有某种性质, 只需在图形上任取一点作代表. 如果所取点 P 与点 C 重合, 那么显然结论成立, 因此证明过程中的点 P 与点 C 不重合.

于另一个直角三角形的一直角边, 则这两个直角三角形不全等. 在第(2)题中, 由一个锐角相等可判定这两个直角三角形的三个角分别相等, 此时若相等的边是直角边, 或相等的边是斜边, 则均可由 AAS 定理判定两个直角三角形全等; 若一个直角三角形的斜边等于另一个直角三角形的一直角边, 则这两个直角三角形不全等.

2. 提示: (1) 可以证明 $\text{Rt}\triangle CDE \cong \text{Rt}\triangle ABF$, 得 $CE = AF$;

(2) 由 $\angle C = \angle A$, 得 $AB \parallel CD$.

3. 提示: 先证 $\text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle A'D'C'$ (HL), 得 $\angle A = \angle A'$, 再证 $\triangle ACB \cong \triangle A'C'B'$ (ASA).

4. 提示: 利用 HL 定理证明 $\text{Rt}\triangle OMP \cong \text{Rt}\triangle ONP$.

求证: $PA=PB$.

分析: 要想证明 $PA=PB$, 只需证明

$\triangle PCA \cong \triangle PCB$.

证明: $\because MN \perp AB$,

$\therefore \angle PCA = \angle PCB = 90^\circ$.

$\because AC=BC, PC=PC$,

$\therefore \triangle PCA \cong \triangle PCB$ (SAS).

$\therefore PA=PB$ (全等三角形的对应边相等).

如果点 P 与点 C 重合, 那么结论显然成立.

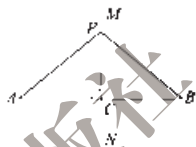


图 10-22

定理 线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等.

想一想

引导学生对性质定理进行逆向思考, 提出猜想, 然后加以证明. 这是获得新的几何结论的一种常用方法. 因为这个性质定理不是“如果...那么...”的形式, 所以学生说出或写出它的逆命题时可能会有一定的困难. 教师可以引导学生分析它的条件和结论, 再写出其逆命题, 最后要求学生将证明过程书写出来.

下面证明过程供参考.

已知: 如图, 线段 AB , $PA=PB$.

求证: 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

证明: 过点 P 作直线 $MN \perp AB$, 垂足为点 C , 则 PC 是 $\triangle PAB$ 的高.

$\because PA=PB$,

$\therefore \triangle PAB$ 是等腰三角形.

$\therefore PC$ 是 $\triangle PAB$ 的中线 (三线合一).

$\therefore AC=BC$.

$\therefore$ 直线 MN 是线段 AB 的垂直平分线.

$\therefore$ 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

证明这一判定定理有多种思路, 除了上面的方法, 还可以取 AB 的中点 C , 证明 $PC \perp AB$; 或作 $\angle APB$ 的平分线 PC , 证明 $PC \perp AB$, 且 $AC=BC$.

想一想

你能写出上面这个定理的逆命题吗? 它是真命题吗? 如果是, 请你证明它.

定理 到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上.

例 1 已知: 如图 10-23, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, O 是 $\triangle ABC$ 内一点, 且 $OB=OC$.

求证: 直线 AO 垂直平分线段 BC .

证明: $\because AB=AC$,

$\therefore$ 点 A 在线段 BC 的垂直平分线上 (到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上).

同理, 点 O 在线段 BC 的垂直平分线上.

$\therefore$ 直线 AO 是线段 BC 的垂直平分线 (两点确定一条直线).

你还有其他证明方法吗?

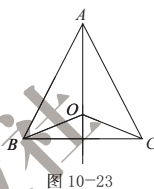
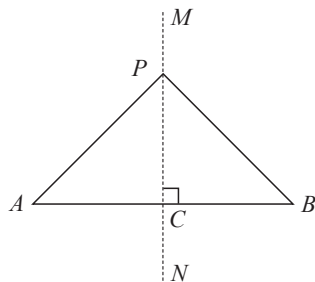


图 10-23



证明完这一定理之后,可以根据学生的实际情况在此进行适当的总结:线段的垂直平分线可以看成是到线段两端距离相等的所有点的集合;线段是一个轴对称图形,线段的垂直平分线是它的一条对称轴.

例 1

教学中,可能会有学生用全等三角形证明:设 AO 交 BC 于点 D ,先依据基本事实 SSS 证明 $\triangle ABO \cong \triangle ACO$,得到 $\angle BAO = \angle CAO$,再证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$,从而使问题得证.教师应注意引导学生对比两种证明方法,体会线段垂直平分线的判定定理的作用.

做一做

对于用尺规作线段的垂直平分线，学生在七年级上册已学过，这里可引导学生回顾，并让他们能够证明作图方法的正确性。

在证明作图方法时，学生可能会有多种思路，比较简单的方法是利用线段垂直平分线的判定定理。学生的证明只要合理就应予以肯定。

随堂练习

1. 7; 60.
2. 提示：(1) 利用线段垂直平分线的性质定理；
(2) 证明 $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (SSS)。

习题 10.10

1. 60° .
2. 这些顶点都在线段 AB 的垂直平分线上。

做一做

(1) 用尺规作出线段 AB (图 10-24) 的垂直平分线。

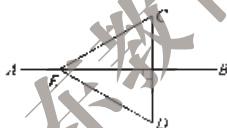


图 10-24

(2) 请你就尺规作线段 AB 的垂直平分线方法的正确性给出证明，并与同伴进行交流。

随堂练习

1. 如图，已知 AB 是线段 CD 的垂直平分线， E 是 AB 上的一点。如果 $EC = 7$ cm，那么 $ED =$ _____ cm；如果 $\angle ECD = 60^\circ$ ，那么 $\angle EDC =$ _____ $^\circ$ 。



(第 1 题)

2. 已知： MN 是线段 AB 的垂直平分线， C, D 是 MN 上的两点。
求证：(1) $\triangle ABC, \triangle ABD$ 是等腰三角形；
(2) $\angle CAD = \angle CBD$ 。

习题 10.10

知识技能

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， AB 的垂直平分线交 AB 于点 E ，交 BC 于点 F ，连接 AF ，求 $\angle AFC$ 的度数。



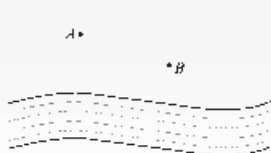
(第 1 题)

数学理解

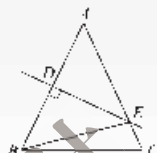
2. 在以线段 AB 为底边的所有等腰三角形中，它们另一个顶点的位置有什么共同特征？

问题 解决

3. 如图, A, B 表示两个仓库, 要在 A, B 一侧的河岸边建造一个码头, 使它到两个仓库的距离相等, 码头应建造在什么位置?



(第3题)



(第4题)

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AC=27$, $BC=23$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E , 求 $\triangle BCE$ 的周长.

联系 拓广

5. 已知直线 l 和 l 上一点 P , 利用尺规作直线 l 的垂线, 使它经过点 P .

例2 求证: 三角形三条边的垂直平分线相交于一点, 并且这一点到三个顶点的距离相等.

要想证明三条直线相交于一点, 只要能证明其中两条直线的交点在另一条直线上即可.



已知: 如图 10-25, 在 $\triangle ABC$ 中, 边 AB, BC 的垂直平分线相交于点 P .

求证: 点 P 在边 AC 的垂直平分线上, 且 $PA=PB=PC$.

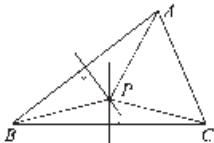


图 10-25

处证明三线共点的方法对学生来讲有些抽象, 教师应逐步引导, 不要操之过急, 学生对它的接受和理解要有一个过程.

3. 提示: 连接 AB , 作 AB 的垂直平分线, 交河岸于点 P . 码头应建在点 P 处.

4. 50.

5. 提示: 以点 P 为圆心, 以任意长为半径作弧, 与直线 l 相交于点 A 和 B , 然后再作线段 AB 的垂直平分线.

例 2

本例是线段垂直平分线的性质定理和判定定理的应用. 三角形三边的垂直平分线交于一点, 这一点称为三角形的外心. 三角形的外心到三角形三个顶点的距离相等, 因此可以以外心为圆心作三角形的外接圆. 这将在九年级下册研究.

要想证明三条直线相交于一点, 只要证明其中两条直线的交点在另一条直线上即可. 此

议一议

这里设置的两个问题为学生进行尺规作图的探索提供了思考空间,同时也为下面“做一做”的学习奠定了基础.

(1) 这样的三角形能画出无数个. 由于高的位置可以不同, 因此所画出的三角形不全等.

(2) 能作出两个三角形. 由于等腰三角形底边上高的位置只能在底边的垂直平分线上, 因此可以在已知边的两侧作两个三角形, 这两个三角形全等. 可以让学生自己尝试用尺规作出所求作的三角形.

需要说明的是, 作图分“定位作图”和“活位作图”. 前者意味着所求作的图形必须作在指定的位置, 而后者则对所求作图形的位置没有硬性限制. 例如, “作已知线段的垂直平分线”属于定位作图, 而“已知两边及其夹角作三角形”属于活位作图.

对于定位作图, 能作出多少满足条件的图形, 就说这个作图题有多少个“解”. 对于活位作图, 如果所作出的图形彼此全等, 那么不论能作出多少个图形都说这个作图题有一个“解”; 如果所作的图形不都全等, 那么不全等的才算不同的“解”.

“已知底边及底边上的高, 求作等腰三角形”属活位作图, 虽然满足条件的三角形可作出两个, 但因为它们全等, 故只有一解. 从这一意义上说, 满足这一条件的等腰三角形是唯一确定的.

做一做

在前面“议一议”的基础上, 完成尺规作图. 其中, 用尺规作线段是六年级下册学习的内容, 而作线段的垂直平分线是七年级上册学习的内容, 因此教学时要让学生先回忆这些基本尺规作图的具体作法. 教师应引导学生体会每一作图步骤的作用及其理论依据.

证明: $\because$ 点 P 在边 AB 的垂直平分线上,

$\therefore PA = PB$ (线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等).

同理, $PB = PC$.

$\therefore PA = PB = PC$.

$\therefore$ 点 P 在边 AC 的垂直平分线上 (到线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上).

议一议

(1) 已知三角形的一条边及这条边上的高, 你能作出三角形吗? 如果能, 能作几个? 所作出的三角形都全等吗?

(2) 已知等腰三角形的底边及底边上的高, 你能用尺规作出等腰三角形吗? 能作几个?

做一做

已知底边及底边上的高, 求作等腰三角形.

已知: 线段 a, h (如图 10-26 (1)).

求作: $\triangle ABC$, 使 $AB = AC$, 且 $BC = a$, 高 $AD = h$.

作法:

(1) 作线段 $BC = a$ (如图 10-26 (2)).

(2) 作线段 BC 的垂直平分线 l ,

交 BC 于点 D .

(3) 在 l 上截取 $DA = h$.

(4) 连接 AB, AC .

$\triangle ABC$ 就是所求作的等腰三角形.

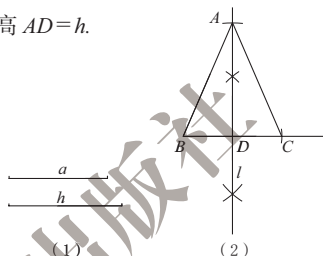


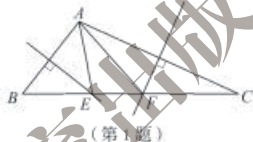
图 10-26

议一议

已知点 P 是直线 l 外一点, 那么怎样用尺规作 l 的垂线, 使它经过点 P 呢? 说说你的作法, 并与同伴进行交流.

随堂练习

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=2$, $\angle BAC > 90^\circ$, AB 的垂直平分线交 BC 于点 E , AC 的垂直平分线交 BC 于点 F . 请找出图中相等的线段, 并求 $\triangle AEF$ 的周长.



(第1题)

2. 为筹办一个大型运动会, 某市政府打算修建一个大型体育中心. 在选址过程中, 有人建议该体育中心所在位置应与该市三个城镇中心 (图中以 P, Q, R 表示) 的距离相等.

(1) 根据上述建议, 试在图 (1) 中画出体育中心 G 的位置;



(1)



(2)

- (2) 如果这三个城镇的位置如图 (2) 所示, $\angle RPQ$ 是一个钝角, 那么根据上述建议, 体育中心 G 应在什么位置?

(3) 你对上述建议有何评论? 你对选址有什么建议?

随堂练习

1. 如果设 AB 的中点为 D , AC 的中点为 G , 那么图中相等的线段有 $AD = BD$, $AG = CG$, $AE = BE$, $AF = CF$; $\triangle AEF$ 的周长等于 2.

引导学生关注 $\angle BAC > 90^\circ$ 这个条件的必要性.

2. (1) (2) 提示: 作 $\triangle PQR$ 两边的垂直平分线, 其交点即为体育中心 G 的位置.

(3) 略.

第 (3) 题旨在引发学生对这一现实问题的进一步思考. 实际上, 对这类选址问题, 从不同角度考虑会有不同的方案. 如果考虑运动员从三个城镇到体育中心的路程问题, 那么就会要求等距; 如果考虑从三个城镇到体育中心的道路的建设成本, 那么就会要求三段距离之和最小. 学生的答案只要有道理就应予以肯定与鼓励.

议一议

教学时, 要鼓励学生先自主思考, 然后交流.

具体作法如下:

1. 任取一点 K , 使点 K 与点 P 在直线 l 两旁;
2. 以点 P 为圆心, 以 PK 的长为半径作弧, 交直线 l 于点 A 和点 B ;
3. 作线段 AB 的垂直平分线 m .

直线 m 垂直于直线 l , 且经过点 P .

之所以在直线 l 的另一侧取点 K , 是为了作弧时能与直线 l 相交于两点. 此外, 为什么直线 m 经过点 P 呢? 这是因为 $PA = PB$, 根据线段垂直平分线的判定定理, 点 P 在线段 AB 的垂直平分线上.

习题10.11

1. 该三角形是一个等腰直角三角形.
2. 提示: 先证 $\angle A = \angle C = 30^\circ$, 再连接 DB , 得 $AD = DB$, $\angle ABD = 30^\circ$, 再证 $DB = \frac{1}{2}DC$ (在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半).
3. 提示: (1) 由 $AE = DE$, 可得 $\angle EAD = \angle EDA$;
(2) 先由 $FD = FA$, 可得 $\angle FDA = \angle FAD$, 再证 $\angle FDA = \angle DAC$;
(3) $\angle EAC = \angle EAD - \angle DAC$, $\angle B = \angle ADC - \angle BAD$.

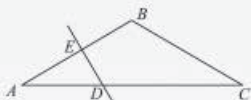
4. 应选方案 (3).

提示: 设 $\triangle ABC$ 的边长为 1. 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, 利用勾股定理可求得 $AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 在 $\text{Rt}\triangle ODC$ 中, 由 $\angle OCD = 30^\circ$, 得 $OC = 2OD$, 再利用勾股定理可求得 $OD = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 因而 $OC = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 于是, $AB + BC = 1 + 1 = 2$; $AD + BC = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \approx 1.866$; $OA + OB + OC = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \approx 1.732$.

习题 10.11

知识技能

1. 已知线段 a , 求作以 a 为底、以 $\frac{1}{2}a$ 为高的等腰三角形. 这个等腰三角形有什么特征?
2. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$, $\angle B = 120^\circ$, AB 的垂直平分线交 AC 于点 D .
求证: $AD = \frac{1}{2}DC$.



(第2题)

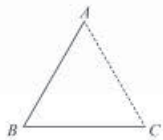


(第3题)

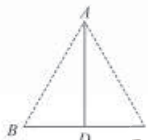
3. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分线, AD 的垂直平分线交 AB 于点 F , 交 BC 的延长线于点 E , 连接 AE , DF .
求证: (1) $\angle EAD = \angle EDA$;
(2) $DF \parallel AC$;
(3) $\angle EAC = \angle B$.

问题解决

4. 如图, 某市三个城镇中心 A , B , C 恰好分别位于一个等边三角形的三个顶点处, 在三个城镇中心之间铺设通信光缆, 以城镇 A 为出发点设计了三种连接方案:
(1) $AB + BC$;
(2) $AD + BC$ (D 为 BC 的中点);
(3) $OA + OB + OC$ (O 为 $\triangle ABC$ 三边的垂直平分线的交点).
要使铺设的光缆长度最短, 应选哪种方案?



(1)



(2)



(3)

(第4题)

5 角平分线

还记得角平分线上的点有什么性质吗？你是怎样得到的？你能证明它吗？^[1]

已知：如图 10-27， OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，点 P 在 OC 上， $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为点 D ， E 。

求证： $PD=PE$ 。

证明： $\because \angle 1 = \angle 2$ ， $OP = OP$ ，

$\angle PDO = \angle PEO = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO$ (AAS)

$\therefore PD = PE$ (全等三角形的对应边相等)。

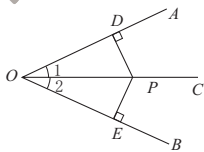


图 10-27

定理 角平分线上的点到这个角的两边的距离相等。^[2]

议一议

你能写出这个定理的逆命题吗？它是真命题吗？如果是，请你证明它。

定理 在一个角的内部，并且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上。

已知：如图 10-28，点 P 为 $\angle AOB$ 内一点， $PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为 D ， E ，且 $PD=PE$ 。

求证： OP 平分 $\angle AOB$ 。

^[3] 证明： $\because PD \perp OA$ ， $PE \perp OB$ ，垂足分别为点 D ， E ，

$\therefore \angle ODP = \angle OEP = 90^\circ$ 。

议一议

在上一节学习中，学生已经历了构造线段垂直平分线性质的逆命题的过程，因此学生容易用类比的方法构造角平分线性质的逆命题。在叙述其逆命题时，可不加什么条件，但验证其真假时，教师应引导学生注意角平分线是在角的内部的射线，所以就要附加“在角的内部”这个条件了。

事实上，从同一点出发的两条射线一般组成两个角，而“角的内部”通常是指其中小于 180° 的角的内部，其余部分为角的外部。如图所示，到 $\angle AOB$ 的两边距离相等的点的集合应是射线 OC ， OD ， OE 和 OF ，但其中只有射线 OC （即在 $\angle AOB$ 内部的

教学目标

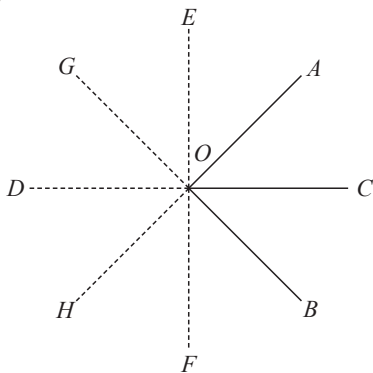
1. 经历探索、猜测、证明的过程，进一步体会证明的必要性，增强证明意识和能力。

2. 证明角平分线的性质定理，探索并证明角平分线的判定定理，进一步发展推理能力。

3. 能运用角平分线的性质定理和判定定理解决问题。

^[1] 学生在七年级上册曾经探索并认识了这一结论，这里应先让学生回忆探索过程，然后自主思考证明的思路和方法，并尝试写出证明过程。

^[2] 角平分线的性质定理与线段垂直平分线的性质定理中都提到“距离相等”，但这两个“距离”有区别。线段垂直平分线性质的“距离”是两点之间的距离，而角平分线性质的“距离”是点到线（射线）的距离。在教学中，要引导学生区分这两个“距离”的不同。



射线)才是 $\angle AOB$ 的平分线. 因此, 逆命题必须增加“在角的内部”的条件, 才能保证它是真命题. 对此, 教师不必向学生做更多解释, 只要学生能从直观上加以理解即可.

[3] 教师应鼓励学生先自主证明, 然后进行交流, 并规范书写格式.

$\because PD=PE, OP=OP,$
 $\therefore \text{Rt}\triangle DOP \cong \text{Rt}\triangle EOP \text{ (HL)}.$
 $\therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$
 $\therefore OP \text{ 平分 } \angle AOB.$

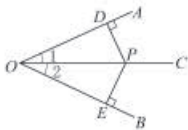


图 10-28

例 1 如图 10-29, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=60^\circ$, 点 D 在 BC 上, $AD=10$, $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, 垂足分别为点 E, F , 且 $DE=DF$, 求 DE 的长.

解: $\because DE \perp AB, DF \perp AC$, 垂足分别为点 E, F , 且 $DE=DF$,
 $\therefore$ 点 D 在 $\angle BAC$ 的平分线上 (在一个角的内部, 并且到角的两边距离相等的点, 在这个角的平分线上),

即 AD 平分 $\angle BAC$.

$\because \angle BAC=60^\circ$,

$\therefore \angle BAD=30^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle AED=90^\circ$, $AD=10$,

$\therefore DE = \frac{1}{2} AD = 5$ (在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半).

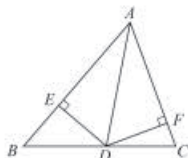


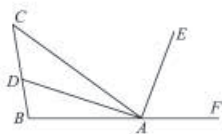
图 10-29

例 1

学生还可能运用 HL 定理证明 $\text{Rt}\triangle AED \cong \text{Rt}\triangle AFD$, 得到 $\angle EAD = \angle FAD$. 教师可通过引导学生对比这两种证明方法, 体会角平分线判定定理解决这类问题的简便性.

随堂练习

1. 如图, AD, AE 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的内角平分线和外角平分线, 它们有什么位置关系?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 一目标在 A 区, 到公路、铁路距离相等, 距离公路与铁路交叉处 500 m. 在图上标出它的位置 (比例尺 1:20 000).

随堂练习

- $AD \perp AE$.
- 把公路、铁路看成两条相交直线, 作出其交角的平分线 OB (O 为顶点), 在 OB 上作 $OC=2.5 \text{ cm}$, 点 C 即为所求.

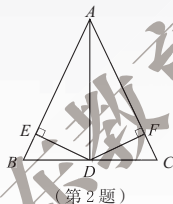
习题10.12

- 提示：作该直角三角形直角的角平分线，该平分线与斜边的交点即为所求. 该点到直角边的距离等于直角边长的一半；这一点到三个顶点的距离相等.
- 提示：可证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$.
- 提示：可以先证明 $BD = BC$ ，进而证明 $\text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle BCE$ ；也可以先证 $AE = BE$ ，从而 $\angle ABE = \angle A = 30^\circ$ ，即 $\angle ABE = \frac{1}{2} \angle ABC$.
- 提示：作线段 CD 的垂直平分线，再作 $\angle AOB$ 的平分线，两线的交点即为所求.

习题 10.12

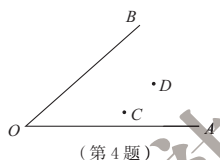
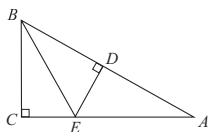
知识技能

- 画一个等腰直角三角形，在它的斜边上求作一点，使它到两条直角边的距离相等（不写画法）. 这一点到直角边的距离与直角边长有什么关系？这一点到三个顶点的距离之间有什么关系？证明你的结论.
- 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， $BD = CD$ ， $DE \perp AB$ ， $DF \perp AC$ ，垂足分别为点 E ， F . 求证： $EB = FC$.



联系拓广

- 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，作 AB 的垂直平分线，交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，连接 BE ，则 BE 平分 $\angle ABC$. 请证明这一结论. 你有几种证明方法？



- 如图，求作一点 P ，使 $PC = PD$ ，并且点 P 到 $\angle AOB$ 两边的距离相等.

例2 求证：三角形的三条角平分线相交于一点，并且这一点到三条边的距离相等。

已知：如图 10-30， $\triangle ABC$ 的角平分线 BM ， CN 相交于点 P ，过点 P 分别作 AB ， BC ， AC 的垂线，垂足分别为点 D ， E ， F 。

求证：点 P 在 $\angle A$ 的平分线上，且 $PD=PE=PF$ 。

证明： $\because BM$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，点 P 在 BM 上，
 $\therefore PD=PE$ （角平分线上的点到这个角的两边的距离相等）。

同理， $PE=PF$ 。

$\therefore PD=PE=PF$ 。

$\therefore$ 点 P 在 $\angle A$ 的平分线上（在一个角的内部，并且到角的两边距离相等的点，在这个角的平分线上）。

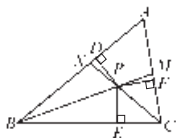


图 10-30

例3 如图 10-31，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ， $\angle C=90^\circ$ ， AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线， $DE \perp AB$ ，垂足为点 E 。

(1) 已知 $CD=\sqrt{2}$ ，求 AC 的长；

(2) 求证： $AB=AC+CD$ 。

(1) 解： $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore DE=CD=\sqrt{2}$ （角平分线上的点到这个角的两边的距离相等）。

$\therefore AC=BC$ ，

$\therefore \angle B=\angle BAC$ （等边对等角）。

$\therefore \angle C=90^\circ$ ，

$\therefore \angle B=\frac{1}{2} \times (180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$ 。^[1]

$\therefore \angle BDE=90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ 。

$\therefore BE=DE$ （等角对等边）。^[2]

在等腰直角三角形 BDE 中，

$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$ （勾股定理），

$\therefore AC=BC=CD+BD=\sqrt{2}+2$ 。

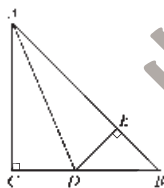


图 10-31

例2

本例是角平分线的性质定理和判定定理的应用。三角形三条角平分线交于一点，这一点称为三角形的内心。三角形的内心到三角形三边的距离相等，因此可以以内心为圆心作三角形的内切圆。这将在九年级下册研究。

教学时可以引导学生类比上一节例2的证明方法，获得证明策略。

例3

本例需要运用前面所学多个定理，而且将计算和证明融合在一起，目的是使学生进一步理解、掌握这些知识和方法，并能综合运用它们解决问题。

^[1] 这里根据等腰三角形的性质推出：等腰直角三角形的底角等于 45° 。这一结论以后可以直接使用，推导过程可以省略。

^[2] 有一个角等于 45° 的直角三角形是等腰直角三角形。这一结论以后也可以直接使用。

这两个结论看似简单，但这里仍要证明。因为在本套教科书的体系下，前面没有出现过这两个定理。

随堂练习

- 提示: $BD = AD$, 而 $AD = 2CD$.
- 提示: 过点 F 作 AC 的垂线, 垂足为 H , 可以证明 $FM = FH = FN$; 然后证明 $\angle FDN = 75^\circ$, $\angle CFD = 60^\circ$, $\angle FEM = 75^\circ$, 所以 $\triangle FEM \cong \triangle FDN$, 从而 $FE = FD$.

习题10.13

- 提示: 过点 F 分别作 BD , BC , CE 的垂线段.

(2) 证明: 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle AED$ 中,

$$\because CD = DE, AD = AD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACD \cong \text{Rt}\triangle AED \text{ (HL)}.$$

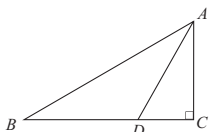
$$\therefore AC = AE.$$

$$\because BE = DE = CD,$$

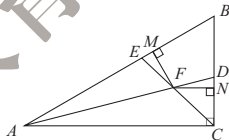
$$\therefore AB = AE + BE = AC + CD.$$

随堂练习

- 已知: 如图, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, AD 是 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的角平分线.
求证: $BD = 2CD$.



(第1题)



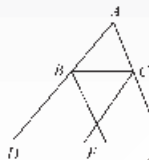
(第2题)

- 已知: 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, AD , CE 分别是 $\angle BAC$, $\angle BCA$ 的平分线, AD 与 CE 相交于点 F , $FM \perp AB$, $FN \perp BC$, 垂足分别为点 M , N .
求证: $FE = FD$.

习题 10.13

知识技能

- 已知: 如图, $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CBD$ 和 $\angle BCE$ 的平分线相交于点 F .
求证: 点 F 在 $\angle DAE$ 的平分线上.



(第1题)

2. 已知: 如图, P 是 $\angle AOB$ 的平分线上的一点, $PC \perp OA$, $PD \perp OB$, 垂足分别为点 C, D .

求证: (1) $OC = OD$;

(2) OP 是 CD 的垂直平分线.



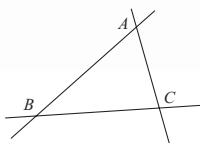
(第2题)

问题解决

3. 如图, 三条公路分别相交于 A, B, C 三点, 现计划修建一个油库.

(1) 如果要求油库到两条公路 AB, AC 的距离都相等, 那么如何选择油库的位置?

(2) 如果要求油库到这三条公路的距离都相等, 那么如何选择油库的位置?

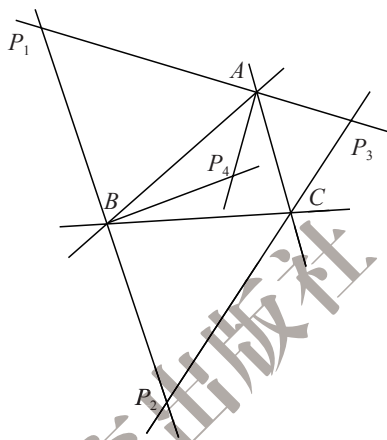


(第3题)

2. 提示: (1) 可以证明 $\text{Rt}\triangle OCP \cong \text{Rt}\triangle ODP$; (2) 利用等腰三角形“三线合一”定理.

3. (1) 油库应建在公路 AB 和 AC 构成的夹角的角平分线上;

(2) 油库应建在三条公路 AB, AC, BC 两两相交所构成的角平分线的交点处. 如图, 满足条件的油库位置有 4 个, 分别是图中点 P_1, P_2, P_3, P_4 所在的位置.



(第3题)

回顾与思考

经过一个阶段的学习,有必要对有关知识进行回顾与反思。“回顾与思考”设立的目的是引导学生回顾、总结本章学习的主要内容及其蕴含的数学思想,并思考获得这些内容的方法和过程,帮助学生逐步构建知识系统,养成回顾反思的学习习惯.为了实现上述目的,教科书中给出了几个问题作为回顾的线索.

以下教学建议供参考.

1. 引导学生回顾已经学习过的基本事实,希望学生能对8条基本事实有一个整体的认识,并能指出在本章中出现的那些基本事实.

学生在“平行线的有关证明”一章中已经学习了8条基本事实,并运用了其中的一部分基本事实证明了平行线的性质定理与判定定理、三角形的内角和定理、三角形的外角与内角的关系定理.希望教师引导学生利用已有的学习经验体会

这些基本事实在本章中的地位和作用,认识到它们是这一章中证明定理、推论的基础.

2. 判定两个三角形全等,常用的思路是:

(1) 已知两角对应相等时,应设法判定这两角所夹的边对应相等,或判定一角的对边对应相等.

(2) 已知两边对应相等时,应设法判定这两边的夹角对应相等,或判定第三条边对应相等.

(3) 已知一边和一角对应相等时,若这一边是已知等角的对边时,应设法判定另一角对应相等;若这一边是已知等角的一边时,应设法判定夹这边的另一角对应相等,也可判定夹这角的另一边对应相等.

在平面几何中,很多问题常常归结为证明线段或角相等,而利用三角形全等来证明线段或角相等,是一种很重要的方法.

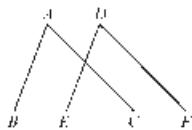
回顾与思考

1. 说说作为证明基础的几条基本事实.
2. 什么是互逆命题?如果原命题是真命题,那么它的逆命题也是真命题吗?举例说明.
3. 判定两个三角形全等,常用的思路有哪些?与同伴进行交流.
4. 等腰三角形和直角三角形都是特殊的三角形,它们除具有一般三角形的性质外,还有一些特殊的性质.你掌握了它们的哪些特殊性质?与同伴进行交流.
5. 判定两个等腰三角形或两个直角三角形全等,除用判定一般三角形全等的基本事实、定理外,还有哪些判定方法?
6. 线段的垂直平分线的性质定理及逆定理的内容是什么?角平分线的性质定理及逆定理呢?
7. 用适当的方式梳理本章的知识,并与同伴进行交流.

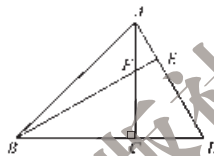
复习题

知识技能

1. 已知:如图,点 B, E, C, F 在同一条直线上, $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, $BE = CF$.
求证: $AC = DF$.



(第1题)



(第2题)

2. 已知:如图,在 $\triangle ABD$ 中, $AC \perp BD$, 垂足为点 C , BE 与 AC 相交于点 F , $AC = BC$, $CD = CF$.
求证: (1) $\angle DBF = \angle CAD$; (2) $BE \perp AD$.

3. 通过比较一般三角形、等腰三角形、直角三角形、等边三角形的性质和判定条件,进一步认识等腰三角形、等边三角形和直角三角形的特性,并把它们纳入到已有的三角形知识体系中,完善知识结构;体会构造逆命题的方法在探索图形判定条件中的作用,培养学生逆向思考的能力.

在分析图形性质时,注意引导学生从边、角、特殊的线段(角平分线、中线、高)出发分别梳理,并提醒学生不要止步于这些结论,还要思考这些结论获得的方法以及证明思路,发展学生的推理意识.

在梳理等腰三角形和直角三角形的相关知识时,引导学生回忆三角形的分类方法,并体会分类标准不同时分类的结果也会不同;希望学生能关注分类思想在研究图形性质中的应用,培养学生的数学思考能力.

4. 关于互逆命题,希望学生不只想到在本章学习的互逆定理,如勾股定理及其逆定理,“等角对等边”和“等边对等角”等,还希望学生能感受到互逆命题的广泛性;注意让学生体会任何命题都有逆命题,但原命题正确,逆命题不一定正确;希望学生能通过对问题的思考加深对互逆命题、互逆定理等概念的理解.

5. 本章中出现的很多命题是学生在六年级下册和七年级上册已经探索过的,对于这些命题希望学生回忆它们的证明思路和方法,能用综合法证明这些命题;还有一些是在本章中出现的新命题,希望学生能全面回顾命题探索和证明的过程,并通过学生间的互动与交流加深对这些命题的认识,同时感受证明的必要性,发展学生的推理能力.

回顾命题的证明过程不等于简单的重复,希望教师关注学生个性化的证明思路和有条件的表达,鼓励学生交流命题的不同证明方法;引导学生思考这些命题证明思路获得的途径,尤其是辅助线的添加方法;有意识地引导学生体会证明中蕴含的数学思想方法,并通过适当的练习指导学生运用这些思想方法解决问题;规范学生的证明过程,促进学生的证明能力得到进一步的提高.

在本章的命题证明中还涉及了反证法,学生对这种方法有一定的了解即可,不必提出过高的要求.

6. 鼓励学生自主梳理本章内容,通过学生充分的思考和交流构建本章知识框架.比如,可以引导学生从轴对称角度整体认识本章中研究的几何图形:等腰三角形、等边三角形、线段、角都是轴对称图形;等腰三角形的性质定理、线段垂直平分线的性质定理和角平分线的性质定理,其实质都是轴对称图形的性质在不同几何图形中具体化的体现;对比这些图形,再梳理不具备轴对称性的一般直角三角形的性质.通过这样的活动,进一步发展学生的分类、归纳、总结的能力,积累数学活动经验.

下页的知识系统结构图仅供参考.

以下典型例题可供参考.

例 1 已知:如图 1,锐角三角形 ABC 的两条高 BD 与 CE 相交于点 O ,且 $OB=OC$.

求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

分析: 在本题中, $\triangle ABC$ 满足哪些条件就是等腰三角形?如何证明 $\angle ABC = \angle ACB$?

你有哪些方法？

证明：∵ BD, CE 是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle AEC = \angle ADB = 90^\circ.$$

∴ $\angle A + \angle ABD = \angle A + \angle ACE = 90^\circ$ （直角三角形的两个锐角互余）.

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB \text{（等边对等角）}.$$

$$\therefore \angle ABD + \angle OBC = \angle ACE + \angle OCB,$$

即 $\angle ABC = \angle ACB$.

$$\therefore AB = AC \text{（等角对等边）}.$$

∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

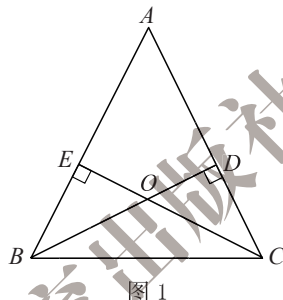
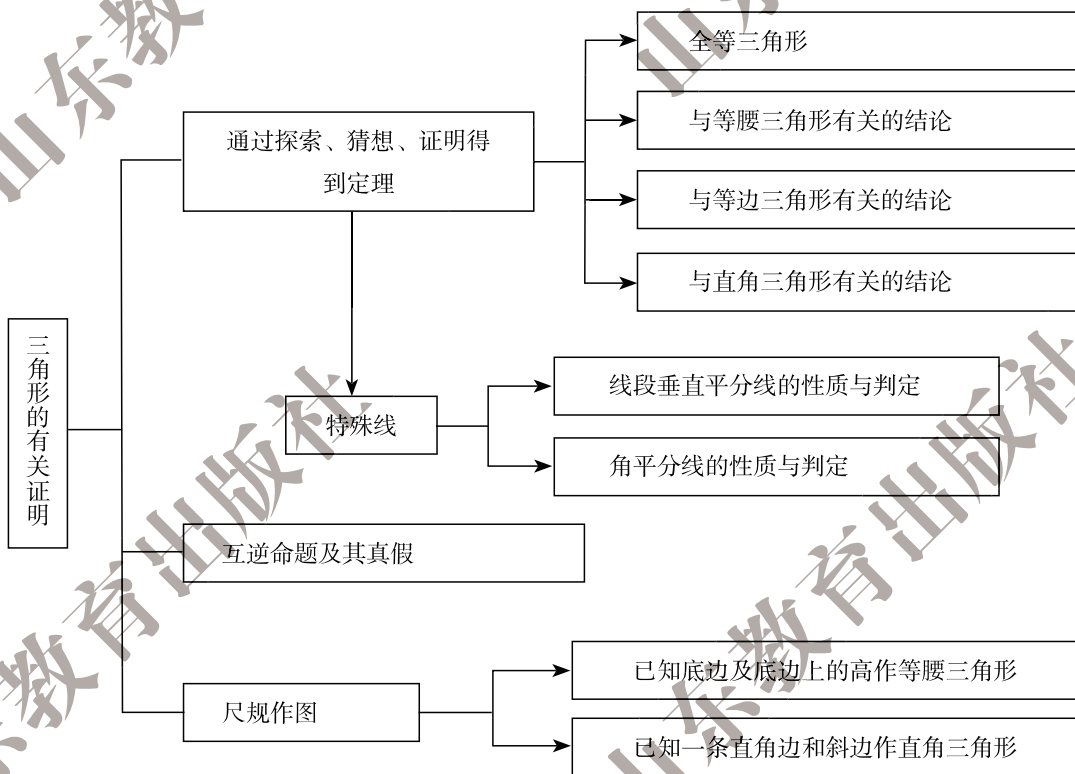


图 1



变式 已知：如图 2，在锐角三角形 ABC 中， $AB = AC$ ，两条高 BD 与 CE 相交于点 O . 求证： $OB = OC$.

证明：∵ BD, CE 是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle AEC = \angle ADB = 90^\circ.$$

∴ $\angle A + \angle ABD = \angle A + \angle ACE = 90^\circ$ （直角三角形的两个锐角互余）.

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE.$$

$$\therefore AB = AC,$$

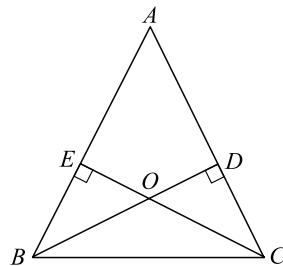


图 2

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ (等边对等角).

$\therefore \angle ABC - \angle ABD = \angle ACB - \angle ACE$,

即 $\angle OBC = \angle OCB$.

$\therefore OB = OC$ (等角对等边).

还可以引导学生思考下面的问题: 在例 1 及其变式中用到了哪些数学知识和方法? 它们有什么联系? 还可以用什么方法证明上面的问题?

例 2 (1) 如图 3, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3\sqrt{2}$, D 为 BC 上一点, $AD = BD = 3$, 在 DA 上截取 $DF = DC$, 连接 BF 并延长交 AC 于点 E .

(1) 请判断 $\triangle ABD$ 的形状, 并说明理由;

(2) 求证: $\triangle BDF \cong \triangle ADC$.

分析: (1) 借助直观可先猜想 $\triangle ABD$ 的形状, 然后再考虑用学过的知识判定.

(2) 思考判定两个直角三角形全等的条件.

(1) **解:** $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形. 理由如下:

$$\because AD^2 + BD^2 = 3^2 + 3^2 = 18, AB^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18,$$

$$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2.$$

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形, $\angle ADB = 90^\circ$ (勾股定理的逆定理).

$$\because AD = BD,$$

$\therefore \triangle ABD$ 是等腰直角三角形.

(2) **证明:** 由 (1) 可得 $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$.

$$\because BD = AD, FD = CD,$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADC.$$

变式 如图 4, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, 垂足为 D , E 为 AC 上一点, BE 交 AD 于点 F , 且 $BF = AC$, $FD = CD$, $AD = 3$, 求 AB 的长.

解: $\because AD \perp BC$,

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ.$$

$$\because BF = AC, FD = CD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BDF \cong \text{Rt}\triangle ADC \text{ (HL)}.$$

$$\therefore BD = AD = 3 \text{ (全等三角形的对应边相等)}.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, 根据勾股定理, 得

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\therefore AB \text{ 的长为 } 3\sqrt{2}.$$

可以引导学生思考: 在例 2 及其变式中用到了哪些数学知识和方法? 它们有什么联系?

例 3 如图 5, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, AB 的垂直平分线分别交 AB 和 AC 于点 D , E .

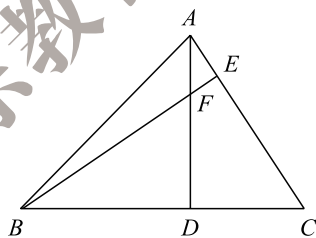


图 3

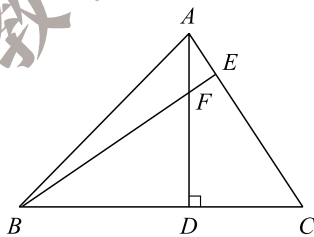


图 4

(1) 求证: $AE = 2CE$;

(2) 连接 CD , 请判断 $\triangle BCD$ 的形状, 并说明理由.

分析: (1) 想办法把研究的两条线段置于同一个直角三角形中.

(2) 先直观感觉, 再证明自己的猜想, 注意运用 $\angle B = 30^\circ$.

(1) 证明: 如图 6, 连接 BE .

$\because DE$ 垂直且平分 AB ,

$\therefore AE = BE$ (线段垂直平分线上的点到这条线段两个端点的距离相等).

$\therefore \angle DBE = \angle A = 30^\circ$ (等边对等角).

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$\therefore \angle EBC = \angle ABC - \angle DBE = 30^\circ$.

$\therefore BE = 2CE$ (在直角三角形中, 如果一个锐角等于 30° , 那么它所对的直角边等于斜边的一半).

$\therefore AE = 2CE$.

(2) 解: $\triangle BCD$ 是等边三角形. 理由如下:

由 (1) 可得 $\angle DBE = \angle CBE$, $\angle BDE = \angle BCE = 90^\circ$.

$\because BE = BE$,

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BCE$ (AAS).

$\therefore BD = BC$ (全等三角形的对应边相等).

$\because \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BCD$ 是等边三角形 (有一个角等于 60° 的等腰三角形是等边三角形).

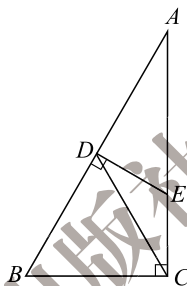


图 5

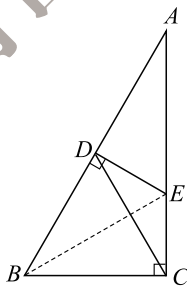


图 6

复习题

1. 提示: 先证 $BC = EF$, $\angle B = \angle DEF$, $\angle F = \angle ACB$. 再证 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

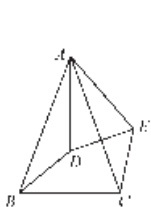
2. 提示: (1) 证明 $\triangle BFC \cong \triangle ADC$ (SAS).

(2) 证明 $\angle EAF + \angle AFE = 90^\circ$.

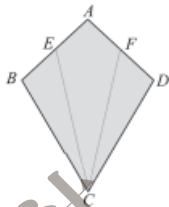
3. 如图, 已知 $AB=AC$, $AD=AE$, $BD=CE$.

(1) 由题设可推出图中哪两个角相等? 试给出证明;

(2) 如果 AD 把 $\angle BAC$ 平分, 那么 AC 与 DE 的位置关系怎样? 证明你的结论.



(第3题)



(第4题)

4. 已知: 如图, 在一个风筝 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $BC=DC$, 分别在 AB , AD 的中点 E , F 处拉两根彩线 EC , FC .

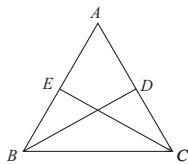
求证: $EC=FC$.

5. 已知: 如图, BD , CE 是 $\triangle ABC$ 的高, 且 $BD=CE$.

求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.



(第5题)



(第6题)

6. 如图, 在等腰三角形 ABC 中, $AB=AC$.

(1) 如果 $\angle ABD=\angle ACE$, 那么 $BD=CE$ 吗?

(2) 如果 $AD=AE$, 那么 $BD=CE$ 吗?

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的度数之比是 $1:2:3$, $AB=\sqrt{3}$, 求 AC 的长.

8. 已知: 如图, $AN \perp OB$, $BM \perp OA$, 垂足分别为 N , M , $OM=ON$, AN , BM 相交于点 P .

求证: $PM=PN$.



(第8题)

3. (1) 本题相等的角较多, 如果由 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SSS), 可以得到相等的角: $\angle BAD = \angle CAE$, $\angle ABD = \angle ACE$, $\angle ADB = \angle AEC$, $\angle BAC = \angle DAE$ (*); 如果由等腰三角形及 (*), 可得 $\angle ABC = \angle ACB = \angle ADE = \angle AED$.

(2) AC 是 DE 的垂直平分线.

4. 提示: 连接 AC . 由 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SSS), 得 $\angle B = \angle D$, 再证明 $\triangle BCE \cong \triangle DCF$ (SAS).

5. 提示: 证明 $\text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle CBE$ (HL).

6. 提示: (1) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (ASA);

(2) 证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ (SAS).

7. $AC = \frac{3}{2}$.

8. 提示: 连接 OP , 证明

$\text{Rt}\triangle OPM \cong \text{Rt}\triangle OPN$.

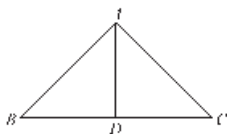
9. $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

10. 略.

11. 略.

12. 提示: 证明 $\triangle ADF \cong \triangle BED$
 $\cong \triangle CFE$ (SAS).

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = a$, AD 是 $\triangle ABC$ 的高, 求 AD 的长.



(第9题)

10. 任意作一个钝角, 求作它的角平分线.

11. 已知线段 a , 求作以 a 为底、以 $2a$ 为高的等腰三角形.

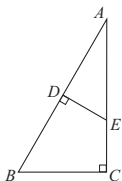
数学理解

12. 已知: 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, D, E, F 分别是 AB, BC, CA 上的点, 且 $AD = BE = CF$.

求证: $\triangle DEF$ 为等边三角形.



(第12题)



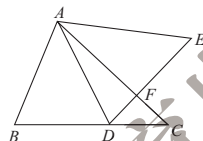
(第13题)

13. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, AB 的垂直平分线分别交 AB, AC 于点 D, E .

求证: $AE = 2CE$.

14. 求证: 等腰三角形的底角必为锐角.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 64^\circ$, $\angle BAC = 72^\circ$, D 为 BC 上一点, DE 交 AC 于点 F , 且 $AB = AD = DE$, 连接 AE , $\angle E = 55^\circ$. 请判断 $\triangle AED$ 的形状, 并说明理由.



(第15题)

13. 提示: 连接 BE . 由 DE 是 AB 的垂直平分线, 得 $AE = BE$, 从而 $\angle ABE = \angle A = 30^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中, $\angle CBE = 30^\circ$, 所以 $BE = 2CE$.

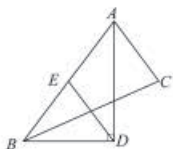
14. 提示: 本题应先画出图形, 写出“已知”“求证”. 设等腰三角形为 $\triangle ABC$, 其中 $AB = AC$, 则 $\angle B = \angle C$. 假设 $\angle B$ 和 $\angle C$ 都不是锐角, 那么 $\angle B = \angle C$ 都为直角或钝角, 于是 $\angle B + \angle C \geq 180^\circ$, 这与三角形内角和定理矛盾. 因此 $\angle B$ 和 $\angle C$ 必为锐角.

15. $\triangle AFD$ 为直角三角形.

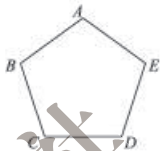
提示: 由 $AB = AD$, $\angle B = 64^\circ$, 可得 $\angle BAD = 52^\circ$, 因为 $\angle BAC = 72^\circ$, 所以 $\angle DAF = 20^\circ$; 由 $AD = DE$, $\angle E = 55^\circ$, 可得 $\angle ADE = 70^\circ$.

联系拓广

16. 已知: 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 过点 B 作 $\angle BAC$ 的平分线的垂线, 垂足为点 D , $DE \parallel AC$, 交 AB 于点 E .
求证: $AE = BE$.



(第16题)

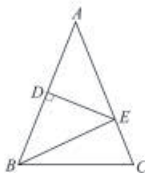


(第17题)

17. 已知: 如图, $AB = AE$, $BC = ED$, $\angle B = \angle E$.

求证: $\angle C = \angle D$.

18. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 的垂直平分线交 AB 于点 D , 交 AC 于点 E . 已知 $\triangle BCE$ 的周长为 8, $AC - BC = 2$, 求 AB 与 BC 的长.



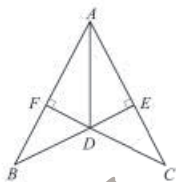
(第18题)

19. 用尺规作出一个 45° 的角.

20. 求作等腰直角三角形, 使其斜边等于已知线段. (保留作图痕迹, 不写作法.)

21. 已知: 如图, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, 垂足分别是点 E , F . BE , CF 相交于点 D , 且 $BD = CD$.

求证: AD 平分 $\angle BAC$.



(第21题)

16. 提示: 先由 $DE \parallel AC$ 及 AD 平分 $\angle BAC$, 证明 $\angle EDA = \angle EAD$, 得到 $AE = DE$. 再由 $\angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$, $\angle ADE + \angle EDB = 90^\circ$, 证明 $\angle ABD = \angle EDB$, 得 $BE = DE$.

17. 提示: 连接 AC , AD , 先证明 $\triangle ABC \cong \triangle AED$, 得 $\angle BCA = \angle EDA$, $AC = AD$. 再证明 $\angle ACD = \angle ADC$.

18. $AB = 5$, $BC = 3$.

提示: 证明 $AC = BE + EC$, 得

$$\begin{cases} AC - BC = 2, \\ AC + BC = 8. \end{cases}$$

19. 提示: 先作一个 90° 的角, 再平分它; 也可以作一个等腰直角三角形.

20. 略.

21. 提示: 证明 $\triangle BDF \cong \triangle CDE$ (AAS), 得 $FD = ED$.

附录一 典型案例评析

直角三角形（第2课时）

设计：河北省保定市第七中学 范宇

评析：河北省石家庄市教育科学研究所 张惠英

一、学情分析

学生已经学习了图形的全等、一般三角形全等的条件、勾股定理以及用尺规作三角形，且在一系列的实践活动中，积累了一定的探索与推理经验，已经具备了进一步探索并证明判定直角三角形全等定理的基础。

在相关知识的学习过程中，学生已经经历了观察、测量、画图、比较、推理、交流等活动，积累了一定数学活动经验；同时还在探索图形全等的过程中，发展了推理能力和有条理的表达能力，具备了一定的自主探索与合作交流能力。

二、任务分析

本课时在学生现有知识和活动经验的基础上，提出具体教学及学习任务：经历探索直角三角形全等条件的过程，用尺规完成已知一条直角边和斜边作直角三角形，掌握判定直角三角形全等的条件，能熟练选择判定方法判定两个直角三角形全等，并解决一些实际问题。

三、教学目标

1. 探索并掌握判定直角三角形全等的“斜边、直角边”（HL）定理。
2. 能用尺规完成已知一条直角边和斜边作直角三角形。
3. 经历探索判定直角三角形全等的“斜边、直角边”（HL）定理的过程，丰富数学活动经验，体会证明的必要性。
4. 通过探究判定直角三角形全等的条件，进一步发展空间观念、推理能力和动手能力，以及有条理的表达能力。

四、教学重点和难点

重点：掌握判定直角三角形全等的条件；运用直角三角形全等解决实际问题。

难点：HL定理的获得与证明。

五、教学过程

1. 温故知新

如图1，已知 $\angle CAB = \angle DBA$ ，要使 $\triangle ACB \cong \triangle BDA$ ，还需要添加什么条件？请说明理由。

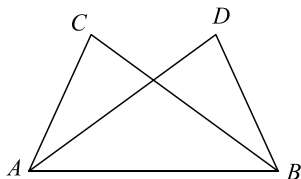


图 1

目的：本活动具有一定的开放性，学生在添加条件的过程中，回顾一般三角形全等的条件，为探索HL定理活动的展开做铺垫.同时，与第四环节巩固与应用中的练习2相呼应.

预期：学生解决问题的方法多种多样.可以通过添加 $AC = BD$ ，利用三角形全等条件 SAS说明两个三角形全等；也可以添加 $\angle C = \angle D$ ，利用三角形全等条件 AAS 说明两个三角形全等；还可以添加 $\angle CBA = \angle DAB$ ，依据 ASA 说明两个三角形全等.在学生解答问题时，教师鼓励学生思考还有哪些方法，并由学生展示不同的解决方案，说明依据.

如果有学生提出添加条件 $BC = AD$ ，那么教师可引导学生观察这两边与 $\angle CAB$ 和 $\angle DBA$ 的位置关系，分析这种方法是否可行，从而转入下一环节；如果没有学生提出这种添加方法，教师也可以主动提出.

2. 探索与发现

提问：两边分别相等且其中一组等边的对角分别相等的两个三角形全等吗？如果这个角是直角呢？请试一试.

做一做：如图2，已知线段 $a = 2\text{ cm}$ ， $c = 3\text{ cm}$ ，直角 α .



图 2

(1) 求作： $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle C = \angle \alpha$ ， $BC = a$ ， $AB = c$.

(2) 你们作出的三角形全等吗？你是如何判断的？

目的：本环节通过作图、观察、比较、交流等活动探索直角三角形全等的特殊条件，给学生充分实践和探索的空间.

“提问”的设计目的是对比一般三角形全等的条件，引出直角三角形全等的特殊判定方法，同时为分析直角三角形的特性与全等条件的关系埋下伏笔.在“做一做”中，学生用尺规完成作直角三角形，通过作图感受结果的唯一性.

预期：教师提出问题后，学生根据对一般三角形全等的认识作出判断.

在“做一做”中，学生用尺规作图.对作图有困难的学生教师进行适当的提示，并鼓励同桌互助.学生观察对比所作出的直角三角形，发现这些三角形全等.学生可能会把这些三角形剪下来重叠在一起，发现它们重合，从而说明它们全等；也可能根据勾股定理得出 $AC = \sqrt{5}\text{ cm}$ ，从而根据 SSS 说明三角形全等.

3. 猜想与验证

提问：在上面的“做一做”中，如果 a, c 分别取其他长度，且满足 $c > a$ ，那么我们刚获得的结论还成立吗？由此你是否能发现判定直角三角形全等的一种“特有”方法？

请尝试用规范的数学语言概括你的发现，并证明它的正确性。

学生通过小组讨论或同学间交流归纳直角三角形特有的全等判定方法。教师点评，规范学生语言。在证明定理时，提示学生首先要画出图形，写出已知、求证，再进行证明。

定理 斜边和一条直角边分别相等的两个直角三角形全等。

已知：如图 3，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle C = \angle C' = 90^\circ$ ， $AB = A'B'$ ， $AC = A'C'$ 。

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ 。

证明：在 $\triangle ABC$ 中，

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 - AC^2 \text{ (勾股定理)}.$$

$$\text{同理, } B'C'^2 = A'B'^2 - A'C'^2.$$

$$\therefore AB = A'B', AC = A'C',$$

$$\therefore BC = B'C'.$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ (SSS)}.$$

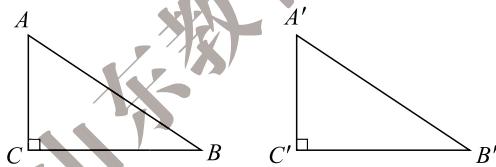


图 3

目的：通过对 HL 定理的证明，使学生经历定理获得的过程：在图形中抽取信息—归纳概括—提出猜想—证明，在这一过程中进一步感受证明的必要性。

预期：教师引导学生在叙述时关注“斜边”“直角边”“直角三角形”这三个关键词，并告诉学生这一定理简述为“斜边、直角边”定理或“HL”。对于该定理的证明，由于有上一环节的铺垫，多数学生基本可以完成；教师对学生的证明进行评析，规范书写方式。

4. 巩固与应用

例 如图 4，有两个长度相同的滑梯，左边滑梯的高度 AC 与右边滑梯水平方向的长度 DF 相等，两个滑梯的倾斜角 $\angle ABC$ 和 $\angle DFE$ 的大小有什么关系？

分析：引导学生从下面角度观察、思考，分析直角三角形的特性和 HL 定理使用的条件。

(1) $\angle ABC$ 和 $\angle DFE$ 分别在两个三角形中？这两个三角形属于哪类三角形？

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中有哪些分别相等的量？

(3) $\angle ABC$ 和 $\angle DFE$ 的大小有什么关系？为什么？

解： $\because$ 滑梯的支撑杆 AC, DE 都与地面垂直，

$$\therefore \angle BAC = \angle EDF = 90^\circ.$$

由题意，得 $BC = EF, AC = DF$ 。

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF \text{ (HL)}.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF \text{ (全等三角形的对应角相等)}.$$

$$\therefore \angle DEF + \angle DFE = 90^\circ,$$

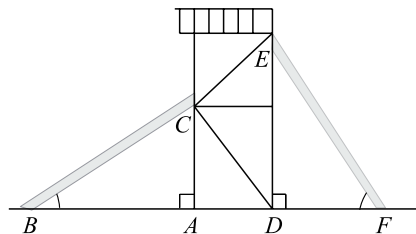


图 4

$$\therefore \angle ABC + \angle DFE = 90^\circ.$$

下列练习由学生独立完成.

练习 1: 判断下列命题的真假, 并说明理由.

- (1) 两个锐角分别相等的两个直角三角形全等;
- (2) 斜边及一锐角分别相等的两个直角三角形全等;
- (3) 两条直角边分别相等的两个直角三角形全等;
- (4) 一条直角边相等且另一条直角边上的中线也相等的两个直角三角形全等.

练习 2: 如图 5, 已知 $\angle ACB = \angle BDA = 90^\circ$, 要使 $\triangle ACB \cong \triangle BDA$, 还需要添加什么条件? 请你选择其中一个加以证明.

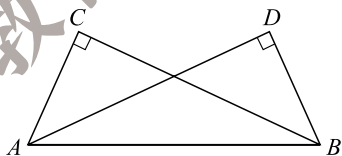


图 5

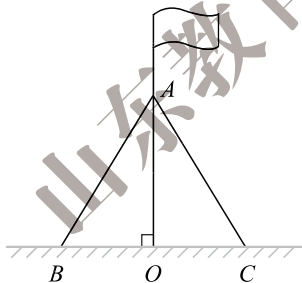


图 6

练习 3: 如图 6, 两条长度为 12 m 的绳子, 一端系在旗杆上, 另一端分别固定在地面的两个木桩上, 两个木桩离旗杆底部的距离相等吗? 请说明你的理由.

目的: 通过适当的例、习题, 加深学生对定理的理解, 明确定理的使用环境和应用格式, 将新知识内化为自己的能力. HL 定理是判定直角三角形全等的特有方法, 但不是唯一的方法. 通过练习 1、练习 2, 学生全面分析直角三角形全等的条件, 有助于提高分析能力与综合能力.

预期: 教师示范, 并规范学生定理的使用格式, 强调该定理是直角三角形特有的, 在应用时要标明直角三角形符号 (即 $\text{Rt}\triangle$).

学生仿照例题格式独立解答习题中问题, 并展示结论, 教师点评.

练习 1 前 3 问学生能迅速作出判断, 第 (4) 问经画图分析后发现, 可以通过证明两次全等判定该命题为真命题. 练习 2 有多种方法, 教师引导学生思考有可能从哪些角度出发添加条件, 使这两个直角三角形全等. 对比“温故知新”环节中的问题, 引导学生关注 $\angle ACB = \angle BDA = 90^\circ$ 这个条件的作用, 体会 HL 定理的特殊性. 由学生任选一种方法进行证明, 教师规范学生的书写格式. 练习 3 由学生板书解答过程, 师生共同点评.

5. 回顾与反思

- (1) 判定两个直角三角形全等的条件有哪些?
- (2) 在分析两个直角三角形全等时, 其他方法都需要三个条件, 而“HL”只有两个条件, 你怎么看?
- (3) 在课堂上, 我们探究 HL 定理经历了怎样的过程? 通过这个过程, 你有什么感受

和体会?

目的:从知识技能、数学思考、问题解决、情感态度四个维度对本节课进行系统的回顾,帮助学生积累属于自己的数学活动经验.

预期:学生交流讨论,总结本节课收获.

(1)判定直角三角形全等的条件有:SSS, ASA, SAS, AAS, HL.

(2)“HL”的前提是直角三角形,所以也需要三个条件.因此,“HL”只适合判定直角三角形全等.

六、问题研讨

如何设计探索直角三角形全等条件的教学活动?

在实际教学中,常见的设计方法有以下三种.

第一种方法:开放的作图探究.学生已经学习了一般三角形全等的判定方法,并且具备了一定的探索经验,在此基础上,通过开放性的作图活动,探索判定直角三角形全等的条件.基本设计思路如下.

情境设计:如图7,已知 $\text{Rt}\triangle ABC$. 求作 $\text{Rt}\triangle DEF$, 使 $\triangle DEF \cong \triangle ABC$.

你有哪些作图方法? 请完成作图, 并与同伴交流.

师生活动: (1) 学生独立思考并尺规作图, 教师鼓励学生尝试不同的方法. 通过小组或同桌讨论, 学生之间进行作图方法的交流.

(2) 学生作图方法的展示与汇总. 通过教师选取或小组推荐, 由学生代表展示作图的方法. 教师引导学生思考、分析作图方法的科学性(即作图依据).

情境设计: 通过前面的操作, 请分析具备哪些条件可以判定直角三角形全等, 并简述理由.

师生活动: (1) 学生独立思考后, 总结方法.

(2) 教师引导学生证明 HL 定理, 并规范证明过程. 其余略.

这种设计方法的最大特点就是教学活动具有开放性, 为学生的探索预留了足够的空间. 在学习活动中, 学生通过自主探究、互动交流经历定理发现、验证以及应用的过程, 有利于学生创造性思维的开发与培养. 但这种教学活动设计对学生能力和数学活动经验的要求较高.

第二种方法: 从勾股定理出发. 对于直角三角形, 当已知两边时, 可以确定第三边. 从直角三角形的特性出发, 可以设计下面的方案.

情境设计: (1) 已知三角形的两边长分别为 3, 4, 求第三边的取值范围. 请任写出一组满足条件的三角形边长.

(2) 已知直角三角形的一条直角边长为 3, 斜边长为 4, 这样的直角三角形有几个? 如果直角边长为 4, 斜边长为 7 呢?

(3) 如果两个直角三角形的斜边相等, 一条直角边也相等, 那么这两个直角三角形

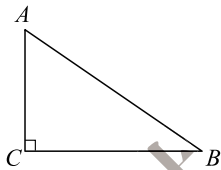


图 7

全等吗？与同伴交流.

师生活动：学生通过计算、分析，发现 HL 定理，教师引导学生归纳、证明.

与前面的方法相比，这种设计方法为学生提供的探索空间较小. 学生在学习活动中通过应用勾股定理，由直角三角形中边的特殊关系很容易接受 HL 定理及其证明方法，对学生的认知水平要求较低.

第三种方式：由一般三角形全等的条件出发，再结合直角三角形边的性质，从而获得直角三角形全等的条件. 如本课的设计.

教学设计要服务于学生的实际，在教学中可以根据学生的具体情况选择恰当的方法，或借鉴这三种方法的一部分.

七、案例评析

范老师设计的这节课，问题设置前后呼应，结构合理、自然；精心设计了学生活动，例题、习题有代表性.

1. 直角三角形是特殊的三角形，寻找两个直角三角形全等的条件，学生最容易想到的是借助判定一般三角形全等的条件. 本教学设计紧紧抓住了这一点，设置了一个较为开放的问题引入本节课的教学，让学生添加条件使两个三角形全等. 这个问题既能帮助学生回顾一般三角形全等的判定条件，也为本节课学习“斜边、直角边”定理埋下伏笔. 随着三角形的特殊化，判定三角形全等的条件是否发生改变？这成为学生关注的焦点. 依据以往的学习经验，学生会想到图形特殊化后，判定全等的条件可能会发生改变. 由此可以培养学生发现和提出问题的能力.

2. 在第二环节中，教师及时引导学生思考：两边分别相等且其中一组等边的对角分别相等两个三角形全等吗？如果这个角是直角呢？请试一试. 接着，通过尺规作图进行验证，通过推理进行证明. 这一设计向学生渗透了由一般到特殊地研究问题的方法，有助于学生积累数学思考的经验.

3. 教无定法，贵在得法. 这节课的引入方式可以是多样的，教师可以根据自己学生的学情灵活选择教学方案. 无论采取哪种方案展开教学，教师都要关注学生的旧有认知，充分考虑学生学习过程中的困难，如帮助学生用数学的语言提出和表达问题，借助图形直观突破难点，规范地使用符号语言，强调全等概念、勾股定理等核心数学知识的重要作用，体会一般到特殊及合情推理与演绎推理的相互作用等.

附录二 学科知识拓展

几何与推理

“几何”这个词的词义来源于希腊文，原意是土地测量，或叫测地术，是数学中最古老的分支之一。古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度、古希腊都是几何学的重要发源地。

几何之所以能成为一门系统的学科，古希腊学者的工作曾起了十分关键的作用。古埃及、古巴比伦的经验几何到了希腊人的手中，加上希腊人本身特有的理性与好辩风格，几何学也从“实验几何”迈入到“推理几何”，这是数学史上一次伟大的智力革命。

柏拉图把逻辑学的思想方法引入了几何，使原始的几何知识受逻辑学的指导逐步趋向于系统，并向严密的方向发展。亚里士多德被公认是逻辑学的创始人，他所提出的“三段论”的演绎推理的方法，极大地影响了几何学的发展。直到今天，在初等几何学中，主要仍是运用三段论的形式来进行推理。

三段论由三部分组成，两个简单判断作前提：一个大前提，一个小前提；一个简单判断作结论。例如

大前提——等腰三角形两底角相等，

小前提—— $\triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $\angle B$ 和 $\angle C$ 是它的两底角，

结论—— $\angle B = \angle C$ 。

用三段论进行推理时，其前提一般应是真实的，符合客观实际的，否则就推不出正确的结论。

第十一章 一元一次不等式与一元一次不等式组

一、《标准》要求

1. 体验从具体情境中抽象出数学符号的过程，理解不等式；掌握必要的运算技能；探索具体问题中的数量关系和变化规律，掌握用不等式进行表述的方法。
2. 通过用不等式表述数量关系的过程，体会模型思想，建立符号意识。
3. 初步学会在具体的情境中从数学的角度发现问题和提出问题，并综合运用数学知识和方法等解决简单的实际问题，增强应用意识，提高实践能力。
4. 结合具体问题，了解不等式的意义，探索不等式的基本性质。
5. 能解数字系数的一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集；会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集。
6. 能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的问题。

二、教学目标

1. 经历将一些实际问题抽象为不等式的过程，进一步体会模型思想，建立符号意识。
2. 结合具体问题，了解不等式的意义。
3. 探索并掌握不等式的基本性质。
4. 理解不等式（组）的解及解集的含义；会解简单的一元一次不等式，并能在数轴上表示一元一次不等式的解集；会解一元一次不等式组，并会用数轴确定其解集。
5. 通过用数轴表示不等式（组）的解的过程，发展几何直观。
6. 能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的实际问题，并能根据具体问题的实际意义，检验结果是否合理，发展应用意识。
7. 初步体会不等式、方程、函数之间的内在联系与区别。
8. 进一步感受数学和生活的联系，体会数学的价值。

三、设计思路

不等式是现实世界中不等关系的一种数学表示形式，它不仅是现阶段学生学习的重点内容，而且也是学生后续学习的重要基础。本章在学生学习了二元一次方程组和一次函数的基础上，开始研究简单的不等关系。通过前面的学习，学生已初步体会到生活中量与量之间的关系是众多而且复杂的，面对大量的同类量，最容易使人想到的就是它们有大小之分。在此之前，学生已初步经历了建立方程模型和函数关系解决一些实际问题的“数学化”过程，为分析量与量之间的关系积累了一定的经验，以此为基础展开不等式的学习，顺理成章。

本章首先通过具体实例建立不等式，探索不等式的基本性质，了解一般不等式的解、解集以及解不等式的概念。然后具体研究一元一次不等式的解、解集、解集的数轴表示，一元一次不等式的解法，以及一元一次不等式的简单应用；通过具体实例渗透一元一次不等

式、一元一次方程和一次函数的内在联系. 最后研究一元一次不等式组的解、解集和一元一次不等式组的解法.

根据学生现有的认知基础和认知特点, 本章的设计主要有列特点:

1. 提供丰富的实际背景. 如等周问题、测树围研究树龄问题、打折销售问题等, 这些都为学生探索实际问题中的不等关系提供了生动、丰富的背景. 通过研究这些问题, 可以进一步发展学生的符号意识, 提高学生发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的能力, 发展模型思想.

2. 突出知识之间的内在联系. 不等式与方程、函数一样, 都是反映客观事物变化规律及其关系的模型. 函数能够刻画事物之间对应变化的过程, 方程能够刻画某个变化过程的一瞬间, 而不等式则刻画变化过程中同类量之间的一个普遍现象. 本章教科书充分注意了这三者之间的联系, 并专设一节“一元一次不等式与一次函数”, 意在引导学生初步体会从整体中把握部分的思维方法, 渗透函数、方程、不等式等重要的数学思想, 发展几何直观.

具体来讲, 第1节“不等关系”用实例引入, 使学生在归纳的过程中认识不等式模型, 体会到生活中的不等关系大量存在, 并初步建立用不等式模型解决简单实际问题的应用意识. 第2节“不等式的基本性质”类比等式的基本性质研究不等式的基本性质, 让学生经历类比猜想、尝试、归纳、得出结论的合情推理过程, 探索不等式的三条基本性质, 使学生能够将不等式进行简单转化. 第3节“不等式的解集”用烟花引火线的实例引入, 在建立不等式之后研究其解集及数轴表示, 让学生结合实际意义来理解不等式的解集, 并引导学生感受不等式的解与方程的解的异同. 第4节“一元一次不等式”经历认识一元一次不等式的概念、求解一元一次不等式, 以及应用一元一次不等式的过程, 逐步积累数学活动经验. 本节设计了大量实际问题, 如打折销售、知识竞赛等, 意图是进一步培养学生的数学应用意识. 第5节“一元一次不等式与一次函数”研究一元一次不等式与一次函数的联系, 发展学生对数学的综合认识, 建立数学学科内部知识之间的联系, 完善学生的认知结构, 并运用这种联系解决一些简单的实际问题, 发展学生的应用意识. 第6节“一元一次不等式组”将解一元一次不等式组的问题转化为解一元一次不等式的问题, 再借助数轴确定其解集.

四、课时安排建议

1 不等关系	1 课时
2 不等式的基本性质	1 课时
3 不等式的解集	1 课时
4 一元一次不等式	2 课时
5 一元一次不等式与一次函数	2 课时
6 一元一次不等式组	3 课时
回顾与思考	2 课时

五、教学建议

数学教学是数学活动的教学，是师生交往、互动和共同发展的过程。教学中，要将学生推到学习的前沿，注重发挥学生的学习主体性和主观能动性。

1. 关注与已有知识的联系，提高学生的思维能力。

“有效的教学一定要从学生知道了什么开始。”不等关系与相等关系有着辩证的联系，因此要类比等式（方程）进行不等式的教学，这样不仅有利于学生认识不等式，而且可以使学生体会知识之间的内在联系，整体上把握知识，发展学生的辩证思维。例如，研究不等式的基本性质时，可以类比等式的基本性质，并比较其异同。在教学过程中，还要关注不等式、函数、方程的内在联系，从式、形多角度体会其异同，发展几何直观。

2. 设置丰富的问题情境，体会知识的发生、发展过程。

教学中，要充分利用教科书中“做一做”“想一想”“议一议”等栏目提供的问题情境，组织学生展开探究性学习。例如，在“不等关系”一节的教学中，要让学生经历探索不等式模型的形成过程，要给学生留有充分的思考与活动时间，使他们初步体会学习不等式的价值；应当让学生充分经历观察、实验、归纳、类比、抽象、概括和数学表示的过程，从而自然地抽象出数学模型。教师不要急于求成，对学生的活动不可包办代替，虽然初中阶段的学习重点是一元一次不等式，但学生提出的多元、高次不等式都属于不等式模型，教师要予以鼓励，并适时给予恰当的引导，发展学生发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的能力。

3. 以基础知识为载体发展运算能力。

不等式的基本性质、不等式（组）的解法及不等式解集的数轴表示是学生后继学习的重要基础和必备技能，一定量的练习是完全必要的，但不宜停留在简单的模仿训练与机械记忆的层次上，更不必强调解不等式（组）的步骤。要引导学生能够说出一个不等式为什么可以从一种形式变形为另一种形式，理解其中的算理。让学生思考不等式的解集为什么能在数轴上表示，为什么通过数轴能够迅速准确地确定不等式组的解集，发展其代数变形能力、说理能力和数形结合能力，养成步步有据、准确表达的良好数学学习习惯。

在教学过程中，对学生求解不等式（组）的基本训练要自始至终加以关注，而不宜一步到位突击训练。如解决一些实际问题时，建立不等式模型之后，同样要关注其求解过程、解的准确性及解的合理性，在这个过程中，使学生进一步体会解不等式（组）与解方程（组）的异同。

4. 恰当把握实际背景题目的难度，关注学生多角度的思考。

运用一元一次不等式解决实际问题的难点是建立不等式模型。教学时，教师要鼓励学生自主探索与合作交流，引导学生大胆尝试求解，并逐步养成验证与反思的习惯，同时要鼓励解法的多样性。例如，对某些实际问题，学生可能用方程、函数知识处理，只要学生的解法合理，就应当予以鼓励，不必强求统一。重要的是发展学生的思维策略，促进学生一般数学观的建立，发展学生的数学应用意识。教学要立足于学生自身的认知水平，实际背景的题目难度要控制在教科书例题、习题的水平上，不要人为加大难度。

5. 关注学生的个体差异, 提高学生的学习积极性.

教学过程中, 要尊重学生的个体差异, 关注学生的学习情感和自信心的建立. 本章教学要提倡解决问题策略的多样化, 发展学生的学习个性, 允许出错, 鼓励创新. 特别是对学习有困难的学生, 教师要耐心倾听他们的看法, 适时引导, 增强其学习的兴趣和自信心. 对于学有余力的学生, 要多提供一些材料, 引导他们自学, 发展他们的数学才能.

六、评价建议

1. 关注学生的学习过程.

《标准》指出: “评价不仅要关注学生的学习结果, 更要关注学生在学习过程中的发展和变化.” “数学思考和问题解决的评价要依据总目标和学段目标的要求, 体现在整个数学学习过程中.” 本章的教学要特别关注学生在建立不等式模型过程中的表现. 例如, 是独立思考还是合作交流获得的? 是否有条理地思考? 阅读理解、符号表达、求解不等式(组)等基本能力较以前是否有所发展? 要发现学生的点滴进步, 及时鼓励.

2. 恰当评价学生问题解决的相关能力.

对于学生在发现问题、提出问题、分析问题、解决问题等方面的能力要求, 要注意循序渐进, 螺旋上升, 恰当引导, 不可要求过高. 例如, 运用不等式解决简单的实际问题, 学生不一定能一次完成好, 但只要有合理的地方(比如, 能够借助列表、画相应的函数图象等方法来分析), 就要给予鼓励.

3. 关注学生对不等式内容的实质性认识.

对学生掌握不等式(组)的有关性质和解法的评价, 要关注学生对问题的实质性认识和对算理的理解, 不提倡单纯记忆和机械模仿. 如对不等式的三条基本性质, 可以考查学生能否用有关的实例进行说明, 能否清晰地说明在不等式的相关变形过程中运用了哪条基本性质等.

第十一章 一元一次不等式与一元一次不等式组

烟花给节日增添了喜庆的气氛，你是否想过，烟花引火线的安全长度会与某种“不等关系”有关吗？也许，你对手机通话费以及打折购物等消费方案的选择并不陌生，但你知道它们同样会涉及一些“不等关系”吗？其实，与相等关系相比，不等关系更为普遍。

与一元一次方程的学习类似，本章将研究不等式的性质、一元一次不等式（组）的解法，并通过解决一些简单的实际问题，体会不等式的模型思想及一元一次不等式、一次函数、一元一次方程之间的内在联系。

主题图以天空中绽放的礼花、翘翘板、不等式（组）为背景，并配以相应的语言文字，意在激发学生的学习欲望，暗示本章主要学习内容。

学习目标

- 经历探索、发现不等关系的过程，进一步体会模型思想
- 探索并掌握不等式的基本性质，体会类比的思想方法
- 会解一元一次不等式（组）并直观表示其解集，发展几何直观
- 能够用一元一次不等式解决一些简单的实际问题
- 体会不等式、函数、方程之间的联系

教学目标

1. 感受生活中存在着大量的不等关系,了解不等式的意义,初步体会不等式是刻画量与量之间关系的一种重要模型.

2. 经历由具体实例建立不等式模型的过程,进一步发展符号意识.

3. 会用不等号表示简单的不等关系;能用实际生活背景和数学背景解释简单不等式的意义.

本节通过有一定探索性的问题,让学生充分感受生活中存在大量的不等关系,由此说明不等式在实际生活中无处不在.初步体会不等式是刻画量与量之间关系的一种重要模型.同时,初步渗透根据数量关系列不等式的方法.

需要注意的是,本节教学的关注点应放在学生是否会分析问题中的数量关系,是否会建立合理的不等关系.本节出现的不等式不仅仅局限于一元一次不等式,其意图是让学生体会现实生活中不等关系的多样性,更好地感受模型思想.

1 不等关系

[1] 如图 11-1,用两根长度均为 l cm 的绳子分别围成一个正方形和一个圆.

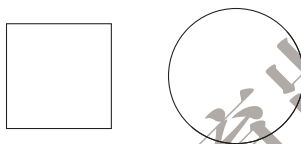


图 11-1

(1) 如果要使正方形的面积不大于 25 cm^2 ,那么绳长 l 应满足怎样的关系式?

(2) 如果要使圆的面积不小于 100 cm^2 ,那么绳长 l 应满足怎样的关系式?

(3) 当 $l=8$ 时,正方形和圆的面积哪个大? $l=12$ 时呢? 改变 l 的取值再试一试,由此你能得到什么猜想?

做一做

(1) 铁路部门对旅客随身携带的行李有如下规定:每件行李的长、宽、高三边之和不得超过 160 cm. 设行李的长、宽、高分别为 a cm, b cm, c cm, 请你列出行李的长、宽、高满足的关系式.

(2) 通过测量一棵树的树围(树干的周长)可以估计出它的树龄. 通常规定以树干离地面 1.5 m 的地方为测量部位. 某棵树栽种时的树围为 6 cm, 以后 10 年内每年增加约 3 cm, 设经过 x 年后这棵树的树围超过 30 cm, 请你列出 x 满足的关系式.

① “不大于”指的是“小于或等于”,通常用符号“ $\leq$ ”表示. 例如, x 不大于 10 可以表示为 $x \leq 10$ (读作“ x 小于或等于 10”). 类似地,“不小于”指的是“大于或等于”,通常用符号“ $\geq$ ”表示 (读作“大于或等于”).

[1] 设置这个问题的意图是:通过问题(1)(2)直接建立不等关系;通过问题(3)体会同类量之间最常见的是比大小问题,并发展学生的归纳猜想能力. 在解决这一串问题的过程中,让学生体会不等式与方程、函数一样,也是刻画事物变化规律的重要模型,并初步感知最优化思想.

问题(1)(2)涉及“不大于”“不小于”,对此教科书以脚注的形式进行了解释. 教学时,教师可在提出该问题之前,先让学生举例说明他们对这两个词的认识,在此基础上,教师再明确这两个词的含义及其符号表示.

对于问题(3),可以让得到猜想的学生进一步解释其合理性,以便为研究不等式的性质埋下伏笔.

(1) 要使正方形的面积不大于 25 cm^2 , 就是

$$\left(\frac{l}{4}\right)^2 \leq 25,$$

即

$$\frac{l^2}{16} \leq 25.$$

(2) 要使圆的面积不小于 100 cm^2 , 就是

$$\pi \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \geq 100,$$

即

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq 100.$$

(3) 当 $l = 8$ 时, 正方形的面积为 $\frac{8^2}{16} = 4 (\text{cm}^2)$, 圆的面积为 $\frac{8^2}{4\pi} = \frac{16}{\pi} (\text{cm}^2)$, $4 < \frac{16}{\pi}$, 此时圆的面积大.

当 $l = 12$ 时, 正方形的面积为 $\frac{12^2}{16} = 9 (\text{cm}^2)$, 圆的面积为 $\frac{12^2}{4\pi} = \frac{36}{\pi} (\text{cm}^2)$, $9 < \frac{36}{\pi}$, 此时还是圆的面积大.

改变 l 的取值, 仍能得到相同的结论.

我们可以猜想, 用长度均为 $l \text{ cm}$ 的两根绳子分别围成一个正方形和一个圆, 无论 l 取何值, 圆的面积总大于正方形的面积, 即

$$\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{16}.$$

做一做

进一步让学生经历由实际问题建立不等式的过程, 为后面得不等式的概念积累素材.

(1) 这是一个用三元一次不等式来刻画不等关系的问题. 学生大多对坐火车有一定的认识, 此处教科书已经用字母表示出长、宽、高, 相信学生能够很容易地列出不等式.

$$a + b + c \leq 160.$$

(2) 这是一个用一元一次不等式来刻画不等关系的问题. 分析问题情境需要一定的生活知识积累, 相信学生能够列出正确的不等式. 如果有些学生受方程影响而列方程, 然后再用不等式写出答案, 教师也不要急于干涉, 这恰恰反映了方程与不等式的内在联系. 教师可以发动学生一起讨论、交流, 最终统一为直接列出不等式.

$$6 + 3x > 30.$$

对学生列出的不等式, 要让他们试着说明理由, 只要合理, 就应当鼓励, 不必强调形式的绝对统一.

议一议

意在让学生抽象概括不等式的概念. 教学时, 如果学生存在困难, 那么可以让学生将所列出的不等式与等式进行对比, 然后类比等式的概念得出不等式的概念, 发展学生的类比思想和语言表达能力.

[1] 对于不等号“ $<$ ”(或“ $\leq$ ”), “ $>$ ”(或“ $\geq$ ”), 教师要组织学生说出它们各自的含义, 使学生理解符号的意义, 发展学生文字语言与符号语言相互转换的能力.

需要说明的是, 用“ $\neq$ ”连接的式子也是不等式.

随堂练习

- 略.
- (1) $a \geq 0$;
(2) $a < c$;
(3) $x + 17 < 5x$;
(4) $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

习题11.1

- (1) $3x + 8 > 5x$;

议一议

观察由上述问题得到的关系式: $\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{16}$, $a+b+c \leq 160$, $6+3x > 30$, 它们有什么共同特点?

[1] 一般地, 用不等号“ $<$ ”(或“ $\leq$ ”), “ $>$ ”(或“ $\geq$ ”)连接的式子叫做不等式 (inequality).

例 用适当的不等号表示下列关系:

- a 是正数;
- x 的 2 倍与 3 的和小于 4;
- x 的一半与 6 的和大于 x 的 4 倍;
- x 的 3 倍不大于 x 与 3 的差.

解: (1) $a > 0$;

(2) $2x + 3 < 4$;

(3) $\frac{1}{2}x + 6 > 4x$;

(4) $3x \leq x - 3$.

随堂练习

1. 试举几个用不等式表示的例子.

2. 用适当的不等号表示下列关系:

- a 是非负数;
- 直角三角形的一条直角边 a 比斜边 c 短;
- x 与 17 的和比它的 5 倍小;
- 两数的平方和不小于这两数积的 2 倍.

习题 11.1

知识技能

1. 用适当的不等号表示下列关系:

- x 的 3 倍与 8 的和比 x 的 5 倍大;

- (2) x^2 是非负数;
 (3) 地球上的海洋面积大于陆地面积;
 (4) 老师的年龄比小明年龄的 2 倍还大;
 (5) 铅球的质量比篮球的质量大.

数学理解

2. 请设计不同的实际背景来表示下列不等式:

- (1) $x + y \leq 5$; (2) $2x + 1 \geq 3$.

问题解决

3. 用甲、乙两种原料配制成某种饮料, 已知这两种原料的维生素 C 含量及购买这两种原料的价格如下表:

原料	甲种原料	乙种原料
维生素含量及价格		
维生素 C 含量/(单位/千克)	600	100
原料价格/(元/千克)	8	4

现配制这种饮料 10 千克, 要求至少含有 4 200 单位的维生素 C, 试写出所需甲种原料的质量 x (千克) 应满足的不等式.

4. 在第 3 题的条件下, 如果还要求购买甲、乙两种原料的费用不超过 72 元, 那么你能写出 x (千克) 应满足的另一个不等式吗?

联系拓广

5. (1) 在通过桥洞时, 我们往往会看到如图 (1) 所示的标志, 这是限制车高的标志, 你知道通过该桥洞的车高 x (m) 的范围吗?
 (2) 在通过桥面时, 我们往往会看到如图 (2) 所示的标志, 这是限制车重的标志, 你知道通过该桥面的车重 y (t) 的范围吗?



(第 5 题)

- (2) $x^2 \geq 0$;
 (3) $S_1 > S_2$ (S_1 表示地球上的海洋面积, S_2 表示陆地面积);
 (4) $x > 2y$ (x 表示老师的年龄, y 表示小明的年龄);
 (5) $m_1 > m_2$ (m_1 表示铅球的质量, m_2 表示篮球的质量).

对于第 (3) (4) (5) 题, 可能会有学生缺乏用字母表示的意识, 对此教师要注意引导.

2. 略. 教师可启发学生开拓思路, 挖掘不等式与实际生活的广泛联系.
 3. $600x + 100(10 - x) \geq 4\ 200$;
 4. $8x + 4(10 - x) \leq 72$.
 5. $x \leq 5$, $y \leq 10$.

教学目标

1. 经历不等式基本性质的探索过程, 初步体会不等式与等式的异同.

2. 掌握不等式的基本性质, 并能初步运用不等式的基本性质把比较简单不等式转化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式.

本节课分两个阶段探索不等式的三条基本性质. 首先, 基于学生对等式基本性质的认识, 采用类比的方式进行教学. 其次, 考虑到学生理解不等式的基本性质 2 和基本性质 3 (特别是基本性质 3) 可能会有一定的困难, 教科书设计了一个“做一做”, 让学生通过具体运算感受不等号方向的变化.

对于不等式的基本性质 1, 教师可以首先通过天平实验、同桌两人同登台阶、同戴帽子等一些生动形象的生活实例启发学生思考, 然后类比等式的基本性质得出猜想, 再举几个具体的例子加以验证. 如

所以

所以

2 不等式的基本性质

还记得等式的基本性质吗?

如果在不等式的两边都加上或都减去同一个整式, 那么结果会怎样? 请举

几例试一试, 并与同伴交流.

不等式的基本性质 1^① 不等式的两边都加 (或减) 同一个整式, 不等号的方向不变.

与等式的基本性质类似.



做一做

完成下列填空:

$$2 < 3;$$

$$2 \times 5 \quad 3 \times 5;$$

$$2 \times \frac{1}{2} \quad 3 \times \frac{1}{2};$$

$$2 \times (-1) \quad 3 \times (-1);$$

$$2 \times (-5) \quad 3 \times (-5);$$

$$2 \times (-\frac{1}{2}) \quad 3 \times (-\frac{1}{2}).$$

你发现了什么? 请再举几例试一试, 还有类似的结论吗? 与同伴交流.

[1] 不等式的基本性质 2 不等式的两边都乘 (或除以) 同一个正数, 不等号的方向 _____.

不等式的基本性质 3 不等式的两边都乘 (或除以) 同一个负数, 不等号的方向 _____.

① 数学上可以证明, 本节所述不等式的三个基本性质都是正确的.

$$3 < 7,$$

$$3 + 1 = 4, 7 + 1 = 8,$$

$$4 < 8,$$

$$3 + 1 < 7 + 1;$$

$$3 - 5 = -2, 7 - 5 = 2,$$

$$-2 < 2,$$

$$3 - 5 < 7 - 5;$$

$$3 < 7,$$

$$3 + a < 7 + a.$$

要注意引导学生理解不等式的基本性质 1 中“同一个整式”的含义. 在学生理解了不等式的基本性质 1 之后, 还可以根据学生的实际情况, 让他们尝试用式子来表述这一性质: 如果 $a > b$, 那么 $a \pm c > b \pm c$; 如果 $a < b$, 那么 $a \pm c < b \pm c$.

做一做

通过具体例子探索不等式的另外两条基本性质.

前两个空填“ $<$ ”, 后三个空填“ $>$ ”.

学生回答这里提出的问题可能有一定难度(特别是对于基本性质 3 的得出), 要给学生留出充分的自主探究与合作交流的时间, 并注意引导学生与等式的基本性质进行比较.

在实际教学中还可以多举几个例子. 例如, 除了教科书上“ $2 < 3$ ”的情形外, 还可以增加“ $-2 > -3$ ”的情形. 也可以引导学生再举一些实例, 如商场 A 种服装的标价高于 B 种服装的标价, 如果都打八折出售, 那么还是 A 种服装价格高.

另外, 还应当让学生尽可能用语言描述不等关系与不等号方向的变化情况, 以加强对不等式的基本性质 2 和基本性质 3 的领会与理解.

^[1]对于不等式的基本性质 2 和基本性质 3, 同样可以让学生尝试用式子来表述:

如果 $a > b$, 且 $c > 0$, 那么 $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

如果 $a < b$, 且 $c > 0$, 那么 $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

如果 $a > b$, 且 $c < 0$, 那么 $ac < bc$, $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$;

如果 $a < b$, 且 $c < 0$, 那么 $ac > bc$, $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

[1] 这个结论是正确的. 事实上, 因为 $4l^2 > \pi l^2$, 所以 $\frac{4l^2}{16\pi} > \frac{\pi l^2}{16\pi}$, 即 $\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{16}$. 当然, 由于它们的分子相同, 因此也可以先比较它们分母的大小, 进而说明结论的正确性. 学生的回答只要有道理就应予以肯定和鼓励.

例

这是本章第一次运用不等式的基本性质将不等式进行变形, 要注意让学生说出每一步变形的依据, 加强对不等式基本性质的理解.

随堂练习

- (1) $x > 3$; (2) $x > -\frac{5}{6}$;
(3) $x \leq 6$.
- (1) 不成立; (2) 不成立;
(3) 成立; (4) 成立.

习题11.2

- (1) $<$; (2) $<$; (3) $>$; (4) $<$.
对于第1(4)题, 还可以引申到
 $a > b$ 时, $a - b$ _____ 0;
 $a = b$ 时, $a - b$ _____ 0.
- (1) $x < -4$; (2) $x > 9$; (3) $x < -15$; (4) $x < -6$.

[1] 在上一节课中, 我们猜想, 无论绳长 l 取何值, 圆的面积总大于正方形的面积, 即 $\frac{l^2}{4\pi} > \frac{l^2}{16}$.

你相信这个结论吗? 你能利用不等式的基本性质解释这一结论吗?

例 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式:

- (1) $x - 5 > -1$; (2) $-2x > 3$.

解: (1) 根据不等式的基本性质1, 两边都加5, 得
 $x > -1 + 5$,

即

$$x > 4;$$

(2) 根据不等式的基本性质3, 两边都除以-2, 得

$$x < -\frac{3}{2}.$$

随堂练习

1. 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式:

- (1) $x - 1 > 2$; (2) $-x < \frac{5}{6}$; (3) $\frac{1}{2}x \leq 3$.

2. 已知 $x > y$, 下列不等式中哪些一定成立?

- (1) $x - 6 < y - 6$; (2) $3x < 3y$;
(3) $-2x < -2y$; (4) $2x + 1 > 2y + 1$.

习题 11.2

知识技能

1. 已知 $a < b$, 用“ $<$ ”或“ $>$ ”填空:

- (1) $a - 3$ _____ $b - 3$; (2) $6a$ _____ $6b$;
(3) $-a$ _____ $-b$; (4) $a - b$ _____ 0.

2. 将下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式:

- (1) $x + 3 < -1$; (2) $3x > 27$;
(3) $-\frac{x}{3} > 5$; (4) $5x < 4x - 6$.

数学理解

3. (1) 比较 a 与 $a+2$ 的大小; (2) 比较 2 与 $2+a$ 的大小.
4. 举例说明不等式的基本性质与等式的基本性质的区别.

3 不等式的解集

^[1] 燃放某种烟花时, 为了确保安全, 燃放者在点燃引火线后要在燃放前转移到 10 m 以外的安全区域. 已知引火线的燃烧速度为 0.02 m/s, 燃放者离开的速度为 4 m/s, 那么引火线的长度至少是多少厘米?

设引火线的长度应为 x cm, 根据题意, 得

$$\frac{x}{0.02 \times 100} > \frac{10}{4}.$$

根据不等式的基本性质, 得

$$x > 5.$$

所以, 引火线的长度应大于 5 cm.

想一想

- (1) $x = 4, 5, 6, 7.2$ 能使不等式 $x > 5$ 成立吗?
(2) 你还能找出一些使不等式 $x > 5$ 成立的 x 的值吗?

^[2] 能使不等式成立的未知数的值, 叫做不等式的解. 一个含有未知数的不等式的所有解, 组成这个不等式的解集 (solution set). 例如, 5 是不等式 $x+1 > 5$ 的一个解, 4.2, 6, 7, 8, ... 也是它的解, 不等式 $x+1 > 5$ 的解集是 $x > 4$; 不等式 $x^2 > 0$ 的解集是所有非零实数.

解与不等式的解集的意义. 最后, 学习不等式解集的数轴表示, 发展学生的数形结合意识.

^[1] 在建立不等式之前, 应先让学生分辨清楚问题中量与量之间的关系.

为了使燃放者有足够的时间到达安全区域, 引火线燃烧的时间应大于燃放者到达安全区域所用的时间.

在解决这个问题时, 学生可能会有不同的方法. 例如, 有的学生会用方程来解:

设引火线的长度为 x cm 时, 燃放者在燃放前刚好可以转移到 10 m 处, 则

$$\frac{x}{0.02 \times 100} = \frac{10}{4},$$

$$x = 5.$$

$$3. (1) a < a + 2.$$

$$(2) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } 2 < 2 + a;$$

$$\text{当 } a = 0 \text{ 时, } 2 = 2 + a;$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } 2 > 2 + a.$$

4. 略.

教学目标

1. 理解不等式的解与解集的意义.
2. 了解不等式解集的数轴表示.

本节课主要研究不等式的解与解集的意义, 以及不等式解集的数轴表示. 首先, 教科书由烟花引火线的安全长度这一问题情境建立不等式, 得到不等式的解集. 一方面可以让学生再次体验不等式是刻画量与量之间关系的有效模型, 另一方面也可让学生感受到不等式的解集在现实生活中的意义. 然后, 通过“想一想”栏目, 让学生感受不等式的解与方程的解的不同之处, 体会不等式的

因为要到达安全区域，所以引火线的长度要大于 5 cm.

也有的学生会用算术方法来解：

因为燃放者离开的时间要多于 $\frac{10}{4} = 2.5$ (s)，所以引火线的长度要大于 $0.02 \times 2.5 = 0.05$ (m)，即 5 cm.

对于学生的不同方法，教师应当给予鼓励. 同时，教师还要引导学生展开讨论、交流，让所有学生都能理解列不等式解决问题的方法，从而为下一个教学环节做好准备.

当然，实际生活中的引火线不会无限长，因此可能会有学生对这里的结论提出质疑. 对此，教师只需说明大于 5 cm 是引火线长度必须满足的条件，至于具体多长合适，还要考虑其他现实因素.

想一想

通过对一个具体例子的思考，为引入不等式的解及解集的概念做准备.

字母可以表示任何数，但对于满足 $x > 5$ 中的字母 x ，它能够取任何数吗？如果不能，它能取哪些数呢？启发学生动脑思考、动手验证，并从中初步体会不等式的解的意义及不等式的解与方程的解的不同之处.

^[2] 可以让学生举例说明什么是一个不等式的解，什么是一个不等式的解集，不必要求学生死记这些概念.

求不等式的解集的过程叫做解不等式.

议一议

请你用自己的方式将不等式 $x > 5$ 的解集和不等式 $x - 5 \leq -1$ 的解集分别表示在数轴上, 并与同伴进行交流.

不等式 $x > 5$ 的解集可以用数轴上表示 5 的点的右边部分来表示 (如图 11-2), 在数轴上表示 5 的点上画空心圆圈, 表示 5 不在这个解集内.



图 11-2

不等式 $x - 5 \leq -1$ 的解集 $x \leq 4$ 可以用数轴上表示 4 的点及其左边部分来表示 (如图 11-3), 在数轴上表示 4 的点上画实心圆点, 表示 4 在这个解集内.

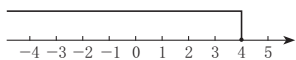


图 11-3

随堂练习

1. 判断正误:

(1) 不等式 $x - 1 > 0$ 有无数个解; ()

(2) 不等式 $2x - 3 \leq 0$ 的解集为 $x \geq \frac{2}{3}$; ()

2. 将下列不等式的解集分别表示在数轴上:

(1) $x > 4$; (2) $x < -1$;

(3) $x \geq -2$; (4) $x \leq 6$.

议一议

鼓励学生用自己的方式把不等式的解集表示在数轴上, 发展学生的数形结合意识.

教学时, 要注意引导学生回忆实数与数轴上点的对应关系, 认识数轴上的点是有顺序的, 实数是可以比较大小的 (要让学生用具体实数对应的点加以说明), 因此, 不等式的解集也可以用数轴表示. 同时, 还要引导学生体验用数轴表示不等式解集具有直观优越性, 以增强学生数形结合的意识.

学生提出的方式可能与教科书介绍的方法不同, 对此教师不要简单地否定, 而应要求学生阐述自己想法, 通过比较不同表示方式, 加深学生对不等式的解集及其数轴表示的理解.

随堂练习

1. (1) $\sqrt{}$; (2) $\times$.

2. 略.

《《》 习题11.3

1. -4 ; 0 , -4 , 3 , -3 , $\frac{1}{5}$,
 4 ; -5 , -10 .
2. 略.
3. (1) 有无数个解, 如 $x = 3$,
 $\frac{5}{2}$, 0 , -8 等都是它的
解;
(2) 有 3 个, $x = 1, 2, 3$.
4. 大于 50 N .

《《》 习题 11.3

《《》 知识技能

1. 在 $0, -4, 3, -3, \frac{1}{5}, -5, 4, -10$ 中, _____ 是方程 $x+4=0$ 的解;
_____ 是不等式 $x+4 \geq 0$ 的解; _____ 是不等式 $x+4 < 0$ 的解.
2. 将下列不等式的解集分别表示在数轴上:
(1) $x \leq 0$; (2) $x > -2.5$;
(3) $x < \frac{2}{3}$; (4) $x \geq 4$.

《《》 数学理解

3. (1) 不等式 $x < \frac{10}{3}$ 有多少个解? 请找出几个;
(2) 不等式 $x < \frac{10}{3}$ 有多少个正整数解? 请一一写出来.

《《》 问题解决

4. 某弹簧秤的称量范围是 $0 \sim 50\text{ N}$, 小明未注意弹簧秤的称量范围, 用它称量了一个物体, 取下物体后, 发现弹簧没有恢复原状. 你知道这个物体的重力在什么范围吗?

4 一元一次不等式

[1] 观察下列不等式:

$$6+3x > 30, x+17 \leq 5x, x > 5, \frac{x}{0.02 \times 100} > \frac{10}{4}.$$

这些不等式有哪些共同特点?

这些不等式的左右两边都是整式, 只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 1, 像这样的不等式, 叫做一元一次不等式 (linear inequality with one unknown).

教学目标

1. 经历一元一次不等式概念的形成过程.
2. 能解数字系数的一元一次不等式, 并能在数轴上表示出解集.
3. 初步认识一元一次不等式的应用价值, 发展学生分析问题、解决问题的能力; 初步感知实际问题对不等式解集的影响, 积累利用一元一次不等式解决简单实际问题的经验.

本节共 2 课时, 主要研究一元一次不等式的概念、一元一次不等式的解法和一元一次不等式的应用.

第 1 课时主要引入一元一次不等式的概念, 学会用不等式的基本性质解一元一次不等式.

^[1]正如建立一元一次方程、一次函数的概念一样，一元一次不等式的概念也是通过观察众多具体的一元一次不等式，进而归纳其共同特点而形成的. 在实际教学中，可以引导学生先回顾一元一次方程、一次函数的概念及其形成过程，这有助于一元一次不等式概念的建立，有利于加深对一元一次方程、一次函数、一元一次不等式这三个概念的理解，以及对它们相互联系的认识.

想一想

目的不仅是让学生识别什么是一元一次不等式,而且还要让学生回味得到不等式的建模过程,体会一元一次不等式是最基本、最重要的不等式.当然,为了加深对一元一次不等式概念的理解,也可以让学生从前面几节课中找出几个不是一元一次不等式的式子.

例 1

引入一元一次不等式的概念之后,教科书通过两个例题介绍一元一次不等式的解法.

对于求解一元一次不等式的解集,学生已有两大基础:

① 会解一元一次方程;② 掌握了不等式的基本性质,并会用不等式的基本性质把不等式化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式.在此基础上,教科书类比解一元一次方程的方法,运用不等式的基本性质解一元一次不等式.教学时要关注一元一次不等式求解过程的书写规范,关注学生对解一元一次不等式基本步骤的感悟.

例 1 比较简单,主要是介绍解一元一次不等式的基本步骤.教学时,应首先鼓励学生自主尝试求解,并交流解答过程,在此基础上再进行适当的归纳总结.解不等式的移项规律与解方程的移项规律一致,要让学生明其中的道理(如有必要,可类比方程的移项进行说明).在学习不等式解法的起始阶段,移项变形的过程不可轻易简化.

例 2

与例 1 相比,本例要复杂一些,需要经历去分母、去括号、移项、将未知数的系数化为 1(即化为“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式)等过程.教学时,仍应首先鼓励学生自主尝试求解,并交流解答过程,在此基础上再进行适当的归纳总结.

想一想

在前面几节课中,你列出了哪些一元一次不等式?试举两例,并与同伴交流.

例 1 解不等式 $3-x < 2x+6$, 并把它解集表示在数轴上.

解: 两边都加 $-2x$, 得

$$3-x-2x < 2x+6-2x.$$

合并同类项, 得

$$3-3x < 6.$$

两边都加 -3 , 得

$$3-3x-3 < 6-3.$$

合并同类项, 得

$$-3x < 3.$$

两边都除以 -3 , 得

$$x > -1.$$

解方程的移项变形对于解不等式同样适用.



这个不等式的解集在数轴上表示如图 11-4 所示:

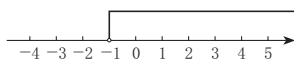


图 11-4

例 2 解不等式 $\frac{x-2}{2} \geq \frac{7-x}{3}$, 并把它解集表示在数轴上.

解: 去分母, 得

$$3(x-2) \geq 2(7-x).$$

去括号, 得

$$3x-6 \geq 14-2x.$$

移项、合并同类项, 得

$$5x \geq 20.$$

两边都除以 5, 得

$$x \geq 4.$$

这个不等式的解集在数轴上表示如图 11-5 所示:



图 11-5

随堂练习

1. 解下列不等式, 并把它们的解集分别表示在数轴上:

(1) $5x < 200$;

(2) $-\frac{x+1}{2} < 3$;

(3) $x-4 \geq 2(x+2)$;

(4) $\frac{x-1}{2} < \frac{4x-5}{3}$.

2. 求不等式 $4(x+1) \leq 24$ 的正整数解.

习题 11.4

知识技能

1. 解下列不等式, 并把它们的解集分别表示在数轴上:

(1) $-x+1 > 7x-3$;

(2) $\frac{1-2x}{3} \geq \frac{4-3x}{6}$;

(3) $\frac{x}{5} + 1 < x$;

(4) $\frac{x+3}{7} > x-5$;

(5) $\frac{x}{2} + 2 \leq \frac{x}{3} - 1$;

(6) $6(x-1) \geq 3+4x$.

2. 三个连续正偶数的和小于 19, 这样的正偶数组共有多少组? 把它们都写出来.

数学理解

3. 下面是小明同学解不等式 $\frac{x+5}{2} - 1 < \frac{3x+2}{2}$ 的过程:

去分母, 得 $x+5-1 < 3x+2$;

移项、合并同类项, 得 $-2x < -2$;

两边都除以 -2 , 得 $x < 1$;

他的解法有错误吗? 如果有错误, 请你指出错在哪里.

3. 有错, 错误之处: (1) 去分母时, 公分母 2 漏乘 “-1” 项; (2) 两边都除以 -2 后, 不等号方向没有改变. 正确的解法是: 去分母, 得 $x+5-2 < 3x+2$. 移项、合并同类项, 得 $-2x < -1$. 两边都除以 -2 , 得 $x > \frac{1}{2}$.

随堂练习

1. (1) $x < 40$;

(2) $x > -7$;

(3) $x \leq -8$;

(4) $x > \frac{7}{5}$.

数轴表示略.

2. $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

习题 11.4

1. (1) $x < \frac{1}{2}$;

(2) $x \leq -2$;

(3) $x > \frac{5}{4}$;

(4) $x < \frac{19}{3}$;

(5) $x \leq -18$;

(6) $x \geq \frac{9}{2}$.

2. 共有两组: 2, 4, 6; 4, 6, 8.

提示: 设三个连续偶数的中间一个为 x , 则另外两个分别为 $x-2$, $x+2$.

第2课时的重点是一元一次不等式的应用.

做一做

最多可按七折销售.

教师可以引导学生回忆进价、标价、打折、利润、利润率等词语的含义,得出其中的主要不等关系:

$$\frac{\text{打折后的销售价} - \text{进价}}{\text{进价}} \geq 5\%.$$

在解决问题的过程中,教师应关注学生的认知水平,发现他们存在的问题,了解学生是否已经具备用不等式解决问题的意识.

例3

本例是不等式建模的继续.教学时,教师一方面要关注学生分析问题中不等关系,进而建立不等式的过程;另一方面还要继续关注解一元一次不等式的技能训练,对于学生解一元一次不等式过程中的易错点,要与学生共同分析出错原因,并有针对性地提出解决的对策.此外,通过本例,要让学生体会实际问题对不等式解集的影响(根据问题的实际意义,本例应取正整数解).

例4

仍是不等式的建模问题,让学生分析问题中的不等关系,进而建立不等式.

做一做

某种商品进价为200元,标价300元出售,商场规定可以打折销售,但其利润率不能少于5%.请你帮助售货员计算一下,此种商品可以按几折销售?

例3 一次环保知识竞赛共有25道题,规定答对一道题得4分,答错或不答一道题扣1分.在这次竞赛中,小明的得分为优秀(85分或85分以上),小明至少答对了几道题?

解: 设小明答对了 x 道题,则他答错和不答的共有 $(25-x)$ 道题.根据题意,得

$$4x - 1 \times (25 - x) \geq 85$$

解这个不等式,得

$$x \geq 22$$

所以,小明至少答对了22道题.

例4 一辆客车从甲地开往乙地,出发10 min后,一辆轿车也从甲地开往乙地,轿车的速度是120 km/h,轿车出发30 min内就超过了客车,则客车的速度小于多少?

解: 设客车的速度是 x km/h,根据题意,得

$$\frac{10+30}{60} \cdot x < 120 \times \frac{30}{60}$$

解这个不等式,得

$$x < 90$$

所以,客车的速度小于90 km/h.

随堂练习

1. 某种商品的进价为400元,出售时标价为500元,后来由于该商品积压,商店准备打折出售,但要保持利润率不低于10%,则最低可打几折?
2. 小明准备用26元买火腿肠和方便面,已知一根火腿肠2元,一盒方便面3元,他买了5盒方便面,他最多还能买多少根火腿肠?

随堂练习

1. 设按标价的 $x\%$ 出售, 根据题意, 得

$$\frac{500 \cdot x\% - 400}{400} \geq 10\%.$$

解这个不等式, 得

$$x \geq 88.$$

所以至多可以打八八折.

2. 设他还可买 x 根火腿肠, 根据题意, 得

$$2x + 3 \times 5 \leq 26.$$

解这个不等式, 得

$$x \leq \frac{11}{2}.$$

所以他最多还能买 5 根火腿肠.

习题 11.5

- (1) $x < 3$;
- (2) $x \geq \frac{15}{2}$;
- (3) $x < \frac{45}{8}$;
- (4) $x \geq -\frac{1}{3}$.

- 设她还可买 x 支笔, 根据题意, 得

$$3x + 2.2 \times 2 \leq 21.$$

解这个不等式, 得

$$x \leq \frac{83}{15}.$$

所以她还可能买 1 支、2 支、3 支、4 支或 5 支笔.

- 设需要 x 名八年级学生参加活动, 根据题意, 得

$$15(60 - x) + 20x \geq 1\,000.$$

解这个不等式, 得

$$x \geq 20.$$

所以至少需要 20 名八年级学生参加活动.

- 设老王印了 x 份广告, 根据题意, 得

$$200 + 0.4x \leq 0.5x.$$

解这个不等式, 得

$$x \geq 2\,000.$$

所以老王至少印了 2 000 份.

教学目标

- 通过观察函数图象、求方程的解和不等式的解集, 从中体会一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的内在联系.
- 通过具体问题初步体会一次函数的变化规律与一元一次不等式解集的联系.
- 感知不等式、方程、函数的不同作用与内在联系.

习题 11.5

知识技能

1. 解下列不等式:

$$(1) \frac{x-5}{2} + 1 > x - 3;$$

$$(2) -\frac{x}{5} + \frac{x}{15} \leq -1;$$

$$(3) \frac{1}{3}x - 2 < 1 - \frac{1}{5}x;$$

$$(4) x - (3x - 1) \leq x + 2.$$

问题解决

- 小颖准备用 21 元买笔和笔记本. 已知每支笔 3 元, 每个笔记本 2.2 元, 她买了 2 个笔记本. 请你帮她算一算, 她还可能买几支笔?
- 某校学生会组织七、八年级共 60 名同学参加环保活动, 七年级学生平均每人收集 15 个废弃塑料瓶, 八年级学生平均每人收集 20 个废弃塑料瓶. 若所收集的塑料瓶总数不少于 1 000 个, 至少有多少名八年级学生参加活动?
- 某个广告公司规定: 设计一份广告 200 元, 每印一份 0.4 元. 客户老王在这个广告公司设计了一份广告, 并印了若干份, 平均每份的成本不高于 0.5 元. 老王至少印了多少份?

5 一元一次不等式与一次函数

函数 $y = 2x - 5$ 的图象如图 11-6 所示, 观察图象回答下列问题:

- (1) x 取何值时, $y = 0$?
- (2) x 取哪些值时, $y > 0$?
- (3) x 取哪些值时, $y < 0$?
- (4) x 取哪些值时, $y > 1$?

你是怎样思考的? 与同伴进行交流.

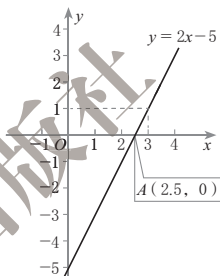


图 11-6

本节主要研究一元一次不等式与一次函数的联系，运用一次函数图象求解一元一次不等式，体会方程、不等式、函数之间的内在联系，并能运用它们之间的联系解决实际问题。

本节包括 2 课时. 第 1 课时首先通过观察一次函数的图象求出相应的一元一次方程的解、一元一次不等式的解集，让学生从整体上感受利用一次函数可以帮助解决一元一次不等式、一元一次方程的问题. 其次通过“做一做”栏目，让学生感受可以运用解不等式帮助研究函数问题，说明一次函数与一元一次不等式相互渗透、相互作用. 感受函数、方程、不等式之间的联系.

做一做

根据图象可知,

- (1) $x = 3$ 时, $y_1 = y_2$;
- (2) $x > 3$ 时, $y_1 > y_2$;
- (3) $x < 3$ 时, $y_1 < y_2$.

随堂练习

$$x < \frac{7}{4}$$

解决这一问题, 学生既可以用解方程的方法, 也可以用解不等式的方法, 还可以用函数图象的方法. 要鼓励学生用不同的方法解决问题, 同时要让学生展示各自与众不同的解法, 并重视对不同解法的分析与评价.

习题 11.6

1. $x > 4$ 时 $y_1 < y_2$.
2. 销售量超过 4 t 时, 生产该产品才能赢利.
3. 略.

做一做

函数 $y_1 = 2x - 5$ 和 $y_2 = x - 2$ 的图象如图 11-7 所示, 观察图象回答下列问题:

- (1) x 取何值时, $y_1 = y_2$?
- (2) x 取何值时, $y_1 > y_2$?
- (3) x 取何值时, $y_1 < y_2$?

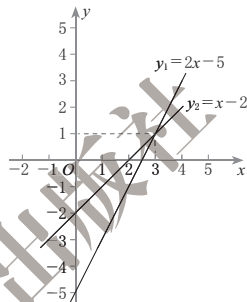


图 11-7

从图象上看, $y_1 = y_2$ 时, 两个一次函数的图象交于一点, 此点的横坐标就是方程 $2x - 5 = x - 2$ 的解; 一次函数 $y_1 = 2x - 5$ 的图象在 $y_2 = x - 2$ 的图象上方的部分对应点的横坐标就是不等式 $2x - 5 > x - 2$ 的解; 一次函数 $y_1 = 2x - 5$ 的图象在 $y_2 = x - 2$ 的图象下方的部分对应点的横坐标就是不等式 $2x - 5 < x - 2$ 的解.

随堂练习

已知 $y_1 = -x + 3$, $y_2 = 3x - 4$, 当 x 取何值时, $y_1 > y_2$? 你是怎样做的? 与同伴交流.

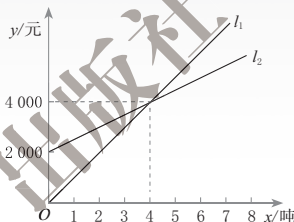
习题 11.6

知识技能

1. 若 $y_1 = 2x + 3$, $y_2 = 3x - 1$, 当 x 取何值时, $y_1 < y_2$?

问题解决

2. 如图, l_1 反映了某产品的销售收入与销售量之间的关系, l_2 反映了该产品的销售成本与销售量之间的关系, 当销售收入大于销售成本时, 该产品才开始赢利. 该产品的销售量达到多少吨时, 生产该产品才能赢利?



(第 2 题)

3. 小明和姐姐在同一学校上学, 从家到学校的距离是 2 km, 他们走路的速度为 4 km/h, 跑步的速度为 10 km/h. 请你根据以上信息, 设计一个可以用一元一次不等式解决的问题, 并给出解决方案.

做一做

兄弟俩赛跑, 哥哥先让弟弟跑 9 m, 然后自己开始跑. 已知弟弟每秒跑 3 m, 哥哥每秒跑 4 m, 何时弟弟跑在前面? 何时哥哥跑在前面?

(1) 设哥哥跑的时间为 x , 你能分别列出哥哥、弟弟跑的路程 $y(m)$ 与时间 $x(s)$ 之间的函数关系式吗?

(2) 试画出这两个函数的图象, 根据图象判断何时哥哥跑在前面, 何时弟弟跑在前面.

议一议

在上面问题中, 列出函数关系式后, 不画图象, 你能判断何时哥哥跑在前面吗?

小明是这样想的:

哥哥、弟弟所跑的路程 $y(m)$ 与时间 $x(s)$ 的函数关系式分别是 $y=4x$ 和 $y=9+3x$. 当他俩并列时, $4x=9+3x$, 此时 $x=9$, 那么当 $x>9$ 时, $4x>9+3x$, 哥哥跑在前面; 当 $x<9$ 时, $4x<9+3x$, 弟弟跑在前面.

你同意他的想法吗?

例 某单位计划在新年期间组织员工到某地旅游, 参加旅游的人数估计为 10 至 25 人, 甲、乙两家旅行社的服务质量相同, 且报价都是每人 200 元. 经过协商, 甲旅行社表示可给予每位游客七五折优惠; 乙旅行社表示可先免去一位游客的旅游费用, 其余游客八折优惠. 该单位选择哪一家旅行社支付的旅游费用较少?

解: 设该单位参加这次旅游的人数是 x 人, 选择甲旅行社时, 所需的费用为 y_1 元, 选择乙旅行社时, 所需的费用为 y_2 元, 则

$$y_1 = 200 \times 0.75x, \text{ 即 } y_1 = 150x;$$

程、不等式的作用. 教学中不要加大难度.

例

要继续关注学生的符号表示, 以及分析问题、解决问题等能力的培养, 还要关注学生解法的多样性.

另外, “ a 至 b ”表示一个数值范围, 至于这个范围是否包含 a, b , 要根据实际情况来确定. 在本例中, 参加旅游的人数为 10 人或 25 人时, 问题仍有意义, 而且按照人们的日常语言习惯, “人数估计为 10 至 25 人”通常也意味着包含 10 人和 25 人.

教学时学生可能会对这类问题有不同理解, 此时教师可引导学生进行适当的讨论, 但不必过分纠缠. 当然, 为了避免产生不必要的麻烦, 在进行有关测试时, 可作出明确规定, 如“人数估计为 10 至 25 人 (含 10 人和 25 人)”.

做一做

分别列出哥哥、弟弟赛跑时所跑的距离 $y_1(m)$, $y_2(m)$ 与哥哥跑的时间 $x(s)$ 之间的关系式: $y_1=4x$, $y_2=9+3x$, 画出图象 (略), 观察可得:

(1) 哥哥开始跑时, 9 s 前弟弟跑在哥哥前.

(2) 9 s 后哥哥跑在弟弟前.

议一议

对于问题, 要让学生广泛发表自己的见解, 学生的做法可能是多种多样的, 只要合理就应予以鼓励. 教学时可引导学生讨论: 哥俩谁跑在前, 关键是要知道哥哥何时追上弟弟. 学生可能直接解不等式 (应当让其解释其中的道理).

函数、方程、不等式都是刻画现实世界中量与量之间变化规律的重要模型. 本节的目的通过具体例子渗透三者之间的内在联系, 帮助学生从整体上认识不等式, 感受函数、方

对于一元一次不等式与一次函数的关系,教学中要着眼于学生对关系的理解,尽可能通过图象、表达式和文字等多种方式让学生逐步认识到二者的内在联系.教学中切忌记忆结论,而是要从整体上把握问题,渗透普遍联系的思想.

随堂练习

设该公司参观者中有女士 x 人,选择购买女士五折票时所需费用为 y_1 元,选择购买团体票时所需费用为 y_2 元,则(这里一张票的原价设为 1 元,也可以设为 a 元)

$$y_1 = 0.5x + 40 - x,$$

$$y_2 = 40 \times 0.8.$$

当女士不足 16 人时,购买团队票合算;当女士恰好是 16 人时,两种方案所需费用相同;当女士多于 16 人时,购买女士五折票合算.

$$y_2 = 200 \times 0.8(x-1), \text{ 即 } y_2 = 160x - 160.$$

由 $y_1 = y_2$, 得 $150x = 160x - 160$, 解得 $x = 16$.

当 $x < 16$ 时, $150x > 160x - 160$;

当 $x > 16$ 时, $150x < 160x - 160$.

因为参加旅游的人数为 10 至 25 人,所以,当 $x = 16$ 时,甲、乙两家旅行社的收费相同;当 $17 \leq x \leq 25$ 时,选择甲旅行社费用较少;当 $10 \leq x \leq 15$ 时,选择乙旅行社费用较少.

随堂练习

某公司 40 名员工到一景点集体参观,该景点规定满 40 人可以购买团体票,票价打八折.这天恰逢妇女节,该景点做活动,女士票价打五折,但不能同时享受两种优惠.请你帮助他们选择购票方案.

习题 11.7

问题解决

- 某单位要制作一批宣传材料.甲公司提出:每份材料收费 20 元,另收 3 000 元设计费;乙公司提出:每份材料收费 30 元,不收设计费.
 - 什么情况下选择甲公司比较合算?
 - 什么情况下选择乙公司比较合算?
 - 什么情况下两公司的收费相同?
- 某学校计划购买若干台电脑,现从两家商场了解到同一型号电脑每台报价均为 4 000 元,并且多买都有一定的优惠.甲商场的优惠条件是:第一台按原报价收费,其余每台优惠 25%;乙商场的优惠条件是:每台优惠 20%.
 - 什么情况下到甲商场购买更优惠?
 - 什么情况下到乙商场购买更优惠?
 - 什么情况下两家商场的收费相同?
- 某电信公司有甲、乙两种手机收费业务.甲种业务规定月租费 10 元,每通话 1 min 收费 0.3 元;乙种业务不收月租费,但每通话 1 min 收费 0.4 元.你认为何时选择甲种业务更合算?何时选择乙种业务更合算?

习题 11.7

- 当制作材料超过 300 份时,选择甲公司比较合算;当制作材料少于 300 份时,选择乙公司比较合算;当制作材料为 300 份时,两公司收费相同,选哪家公司自己可酌情考虑.

提示:设制作 x 份材料时,甲公司收费 y_1 元,乙公司收费 y_2 元,则

$$y_1 = 20x + 3\,000,$$

$$y_2 = 30x.$$

在评价学生作业时,要关注学生结合实际问题灵活思考的能力.

2. (1) 购买电脑超过 5 台时, 甲商场更优惠;
(2) 购买电脑少于 5 台时, 乙商场更优惠;
(3) 购买 5 台电脑时, 两家商场收费相同.
3. 当通话时长超过 100 分钟时, 选用甲种业务合算; 当通话时长不足 100 分钟时, 选用乙种业务合算.

教学目标

1. 经历通过具体问题抽象出不等式组的过程.

2. 理解一元一次不等式组及其解的意义, 初步感知利用一元一次不等式解集的数轴表示求不等式组的解和解集的方法.

本节主要研究一元一次不等式组的概念及一元一次不等式组的解法. 本节共分 3 课时.

第 1 课时: 教科书首先通过“取暖用煤”的情境, 让学生感受到不等式组必须同时满足两个或多个不等式的要求, 以帮助学生领会不等式组的含义. 对于不等式组的解与解集, 一方面要关注与方程组解的异同, 另一方面要重视用一元一次不等式解集的数轴表示求不等式组的解与解集. 教科书没有给出解不等式组的口诀, 主要是着眼于对解不等式组的实质理解, 不增加学生的记忆负担.

6 一元一次不等式组

某校今年冬季烧煤取暖时间为 4 个月. 如果每月比计划多烧 5 吨煤, 那么取暖用煤总量将超过 100 吨; 如果每月比计划少烧 5 吨煤, 那么取暖用煤总量不足 68 吨. 该校计划每月烧煤多少吨?

设该校计划每月烧煤 x 吨, 根据题意, 得

$$4(x+5) > 100, \quad ①$$

且

$$4(x-5) < 68. \quad ②$$

未知数 x 同时满足 ① ② 两个条件. 把 ① ② 两个不等式合在一起, 就组成一个一元一次不等式组, 记作

$$\begin{cases} 4(x+5) > 100, \\ 4(x-5) < 68. \end{cases} \quad (*)$$

[1] 一般地, 关于同一未知数的几个一元一次不等式合在一起, 就组成一个一元一次不等式组 (system of linear inequalities with one unknown).

想一想

你能尝试找出符合上面一元一次不等式组 (*) 的未知数的值吗? 与同伴进行交流.

一元一次不等式组中各个不等式的解集的公共部分, 叫做这个一元一次不等式组的解集. 求不等式组的解集的过程, 叫做解不等式组.

学生在研究这一具体问题时, 自然感知到要解决的问题同时满足两个约束条件, 而这两个约束条件都是不等式. 这样引入不等式组比较自然.

研究不等式组一定要紧密联系不等式, 要让学生理解组成一元一次不等式组的每一个一元一次不等式的地位都要相同.

想一想

学生可以通过列表、画数轴图等方法, 寻求不等式组的解集. 要让学生在充分交流的基础上体会寻找组成不等式组的各个不等式的公共解的方法.

例 1 解不等式组:

$$\begin{cases} 2x-1 > -x, \\ \frac{1}{2}x < 3. \end{cases}$$

①

$$\frac{1}{2}x < 3.$$

②

解: 解不等式 ①, 得

$$x > \frac{1}{3}.$$

解不等式 ②, 得

$$x < 6.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集, 如图 11-8.

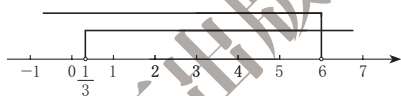


图 11-8

因此, 原不等式组的解集为

$$\frac{1}{3} < x < 6.$$

随堂练习

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x > 1, \\ x-3 < 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x-2 > -1, \\ 3x+1 < 8. \end{cases}$$

2. 解答本节课一开始提出的“烧煤取暖”问题.

习题 11.8

知识技能

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x-5 < 1, \\ 2x > 3; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-5 > 0, \\ 3-x > -1; \end{cases}$$

例 1

要让学生认识到准确、熟练地解不等式是解不等式组的基础, 而运用数轴确定不等式组的解集(找公共部分)是关键. 让学生再次体会数形结合思想的魅力.

随堂练习

$$1. (1) \frac{1}{2} < x < 3;$$

$$(2) 1 < x < \frac{7}{3}.$$

$$2. 20 < x < 22$$

习题 11.8

$$1. (1) \frac{2}{3} < x < 6;$$

$$(2) \frac{5}{2} < x < 4;$$

- (3) $2 < x < 3$;
 (4) $0 < x \leq -1$;
 (5) $-\frac{5}{3} \leq x \leq 0$;
 (6) $-4 < x < 1$.

2. 不等式组的解都是组成该不等式组的每一个不等式的解;但反过来,每一个不等式的解不一定是其组成的不等式组的解.

3. $-2 < a < 2$.

4. 36 h 到 44 h.

提示:设要用 x h 才能装完,根据题意,得

$$\begin{cases} 1\ 800 \leq 50x \leq 2\ 200 & \text{或者} \\ 50x \geq 1\ 800, \\ 50x \leq 2\ 200. \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3x-1 > 5, \\ 2x < 6; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} -2x \geq 0, \\ 3x+5 \geq 0; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{1}{2}x > \frac{1}{3}x, \\ 4x-3 \leq 1; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{x+1}{2} < 1; \\ 7x-8 < 9x. \end{cases}$$

数学理解

2. 不等式 $3x-7 < x$ 的解集、不等式 $2-5x < 2x$ 的解集与不等式组 $\begin{cases} 3x-7 < x, \\ 2-5x < 2x \end{cases}$ 的解集之间有什么关系?

※3. 如果方程组 $\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=a \end{cases}$ 的解 x, y 都是正数,那么你能求出 a 的取值范围吗?

问题解决

4. 一台装载机每小时可装载石料 50 t. 一堆石料的质量在 1 800 t 到 2 200 t 之间,那么这台装载机大约要用多长时间才能将这堆石料装完?

做一做

在什么条件下,长度为 3 cm, 7 cm, x cm 的三条线段可以围成一个三角形?

你和同伴所列的不等式组一样吗? 解集呢? 与同伴进行交流.

例 2 解不等式组:

$$\begin{cases} 3x-2 < x+1, & \text{①} \\ x+5 > 4x+1. & \text{②} \end{cases}$$

解:解不等式 ①, 得

$$x < \frac{3}{2}.$$

解不等式 ②, 得

$$x < \frac{4}{3}.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集,如图 11-9.

第 2 课时,教科书首先通过“做一做”栏目,让学生以自主探究与合作交流的方式进一步感受不等式组的解的意义,然后以具体例题介绍一元一次不等式组的解法.在教学中,要特别注意正确求得不等式解集的重要性,以及用数轴确定不等式组解集的过程与熟练程度,要有充分的时间让学生理解、表述、交流用数轴确定一元一次不等式组解集的过程与结果.

做一做

因为三角形任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边，所以

$$\begin{cases} 3+x>7, \\ x-3<7. \end{cases}$$

解这个不等式组，得 $4<x<10$.

所以，另一条边长满足： $4<x<10$.

学生列出的不等式组中，不等式可能更多一些，其中有些有解，有些无解. 因此教学时要组织学生对所列不等式进行分析、梳理，发展学生的化归能力.

例 2、例 3

教学时要注意两点：①关注学生解不等式的水平；②运用数轴确定不等式组的解集的过程要尽可能让学生自己做。

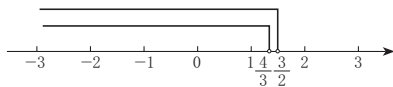


图 11-9

所以，原不等式组的解集是

$$x < \frac{4}{3}.$$

例 3 解不等式组：

$$\begin{cases} 5x-2 > 3(x+1), \\ \frac{1}{2}x-1 \geq 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

①

②

解：解不等式 ①，得

$$x > \frac{5}{2}.$$

解不等式 ②，得

$$x \geq 4.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集，如图 11-10.

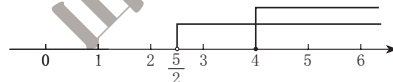


图 11-10

所以，原不等式组的解集是

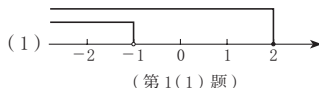
$$x \geq 4.$$

随堂练习

1. (1) $x < -1$;
- (2) $x \geq 2$.

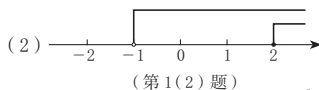
随堂练习

1. 根据下列图形，分别在图后的横线上写出相应不等式组的解集.



解集是 _____;

(第 1(1) 题)



解集是 _____.

(第 1(2) 题)

2. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x+3 < 5, \\ 3x-1 < 8; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{2}+1 < 2(x-1), \\ \frac{x}{3} > \frac{x+2}{5}. \end{cases}$$

习题 11.9

知识技能

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x-1 > 2x, \\ \frac{x}{2}+3 < -2; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x+5 \leq 3(x+2), \\ \frac{x-1}{2} > \frac{x}{3}; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 0.2x > 0.3x+1, \\ 0.5x-1 < 0.2; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{4}, \\ \frac{x}{3}+\frac{x}{2} \geq -1. \end{cases}$$

数学理解

2. 三个数 $3, 1-a, 1-2a$ 在数轴上从左到右依次排列, 你能确定 a 的取值范围吗?

※3. 小明、小华、小刚三人在一起讨论一个一元一次不等式组.

小明: 它的所有解为非负数;

小华: 其中一个不等式的解集为 $x \leq 8$;

小刚: 其中有一个不等式在求解的过程中需要改变不等号的方向.

请你试着写出符合上述条件的不等式组, 并解这个不等式组.

联系拓广

※4. 已知不等式组

$$\begin{cases} 2x-a < 1, \\ x-2b > 3 \end{cases}$$

的解集为 $-1 < x < 1$, 则 $(a+1)(b-1)$ 的值等于多少?

$$2. (1) x < 2;$$

$$(2) x > 3.$$

习题 11.9

$$1. (1) x < -10;$$

$$(2) x > 3;$$

$$(3) x < -10;$$

$$(4) x \geq \frac{3}{4}.$$

$$2. a < -2.$$

3. 这样的不等式组很多, 如

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 1, \\ -3x+24 \geq 0, \end{cases} \text{ 其解集为 } 0 \leq x \leq 8.$$

4. -6.

提示: 由 $\begin{cases} 2x-a < 1, \\ x-2b > 3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x < \frac{a+1}{2}, \\ x > 3+2b. \end{cases}$

解得 $a=1, b=-2$.

因其解集为 $-1 < x < 1$, 所以 $\begin{cases} \frac{a+1}{2} = 1, \\ 3+2b = -1. \end{cases}$

做一做

本不等式组是无解的情况, 让学生明白, 有的不等式组无解.

例 4

本题连用了不等式, 实际上它等同于一个不等式组, 整数解是解集中的一部分.

做一做

解不等式组

$$\begin{cases} x+3 < 5, \\ 2x-1 > 11. \end{cases}$$

①

②

解不等式 ①, 得

$$x < 2.$$

解不等式 ②, 得

$$x > 6.$$

在同一条数轴上表示不等式 ① ② 的解集, 如图 11-11.



图 11-11

不等式 ① ② 的解集没有公共部分, 这时我们说原不等式组无解.

例 4 求不等式 $2 \leq \frac{3x-1}{4} < 5$ 的整数解.

解: 原不等式可化为不等式组

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} \geq 2, \\ \frac{3x-1}{4} < 5. \end{cases}$$

①

②

解不等式 ①, 得

$$x \geq 3.$$

解不等式 ②, 得

$$x < 7.$$

所以不等式组的解集为

$$3 \leq x < 7.$$

原不等式的整数解为 3, 4, 5, 6.

随堂练习

1. 如果不等式组 $\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$ 无解, 那么 a, b 的大小关系是 _____.

2. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x-3 < -6, \\ -3x < 6; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x+4}{2} > 2, \\ \frac{x+2}{2} < \frac{x+3}{3}. \end{cases}$$

3. 求不等式 $-2 \leq \frac{2-3x}{2} < 5$ 的整数解.

习题 11.10

知识巩固

1. 填表:

不等式组	$\begin{cases} x-2 < 0, \\ x+1 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 < 0, \\ x+1 < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x+1 > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x+1 < 0 \end{cases}$
解集				

2. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 3(x-1)-1 \leq x, \\ 2(4.5-x) \leq 3-x; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 5x-2 < 3(x+1), \\ \frac{1}{2}x-1 \geq 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

3. 解下列不等式:

$$(1) -1 < \frac{3}{2}x-13 < 2;$$

$$(2) \frac{1}{2} \leq \frac{1-0.6x}{-3} \leq \frac{2}{3}.$$

联系拓广

4. 一个三角形三边的长度为三个连续的自然数, 若周长大于 24 cm 而小于 30 cm, 求这个三角形最长边的长.

※5. 如果一元一次不等式组 $\begin{cases} 2x-3 \geq x, \\ x \leq m \end{cases}$ 无解, 求 m 的取值范围.

随堂练习

1. $a \geq b$.

2. (1) 无解; (2) 无解.

3. -2, -1, 0, 1, 2.

习题 11.10

1. $-1 < x < 2$; $x < -1$; $x > 2$;
无解.

2. (1) 无解; (2) 无解.

3. (1) $8 < x < 10$;

(2) $\frac{25}{6} \leq x \leq 5$.

4. 设最长边为 x cm, 则另两边分别为 $(x-1)$ cm、 $(x-2)$ cm, 根据题意, 得

$$24 < x + x - 1 + x - 2 < 30.$$

解得 $9 < x < 11$.

因为 x 是自然数, 所以最长边为 10 cm.

5. 不等式组化为 $\begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq m, \end{cases}$ 如果
不等式组无解, 则 $m < 3$.

回顾与思考

设置“回顾与思考”的主要目的是：(1)通过一系列的问题引导学生总结梳理本章知识，把握和分析重难点，促进学生对本章知识内容有更全面的理解，同时系统化回顾本章知识发生、发展的过程，体会数学的基本思想与方法。(2)通过回顾与思考，提高学生总结、概括和反思的能力，积累学习不等式的经验。

通过前面的学习，学生已经积累了与本章内容类似的回顾与思考的经验，如一元一次方程、一次函数等内容的回顾与思考。因此，教学时应首先鼓励学生独立梳理本章内容，形成一个较为完整的知识体系。教师可以提前布置作业，如让学生以小组为单位回顾本章各节的学习内容及思想方法，思考这些内容之间的联系，用适当的方式梳理本章的知识网络，并要求他们指出本章的学习重点、难点或易错点，以及重要的思想方法。不仅如此，教师还可以在此基础上，要求学生配置相应的例题以巩固这些内容，并对自己配置的每道题目，给出分析和解答。

课堂教学时，教师可选择有代表性的学生作品，要求小组代表进行展示，全班师生共同评议。评议时应关注：(1)章知识结构图设计的层次是否清晰，内容是否完整，是否突出了核心知识。(2)学习重点、难点及易错点、思想方法的把握是否准确，题目选取是否典型、解答是否规范简洁等。要特别关注学生解一元一次不等式(组)时出错的根源，针对学生的错误，一方面从解不等式的基本原理出发加以引导，另一方面要紧紧依靠数轴这一直观工具帮助学生认识自己的错误，准确表达一元一次不等式(组)的解。(3)在复习一元一次不等式的应用时，要特别关注学生是否有与一次函数或一元一次方程进行联系的意识，注意引导学生把函数、方程、不等式联系为一个整体加以认识，体会知识之间的内在联系。

回顾与思考

1. 不等式有哪些基本性质？它与等式的基本性质有什么异同？
2. 解一元一次不等式和解一元一次方程有什么异同？
3. 举例说明在数轴上如何表示一元一次不等式(组)的解集。
4. 说一说运用一元一次不等式解决实际问题的基本过程以及你的心得体会。
5. 举例说明一元一次不等式、一次函数、一元一次方程的联系。
6. 用适当的方式梳理本章的知识，并与同伴进行交流。

复习题

知识技能

1. 列不等式(组)：

(1) $x+1$ 是负数；

(2) x^2 是非负数；

(3) x 的 2 倍与 3 的差小于零；

(4) a 的 5 倍与 3 的差不小于 10，且不大于 20。

2. 在不等式 $ax+b>0$ 中， a, b 是常数，且 $a \neq 0$ 。当 _____ 时，不等式的解集是

$x > -\frac{b}{a}$ ；当 _____ 时，不等式的解集是 $x < -\frac{b}{a}$ 。

3. 解下列不等式，并把它们的解集分别表示在数轴上：

(1) $2x+3 < -1$ ；

(2) $-2x+1 < x+4$ ；

(3) $2(-3+x) > 3(x+2)$ ；

(4) $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} \geq 1$ ；

(5) $\frac{2x+1}{3} \leq -\frac{x+4}{2}$ ；

(6) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} > 11$ ；

(7) $\frac{3x+6}{5} - 2 > 2(x+1)$ ；

(8) $\frac{1+2x}{4} - \frac{1-3x}{10} > -\frac{1}{5}$ 。

4. 解下列不等式组，并把它们的解集分别表示在数轴上：

(1) $-5 < 2x+1 < 6$ ；

(2) $-2 < 1 - \frac{1}{5}x < \frac{3}{5}$ ；

(3) $\begin{cases} 8x+5 > 9x+6, \\ 2x-1 < 7; \end{cases}$

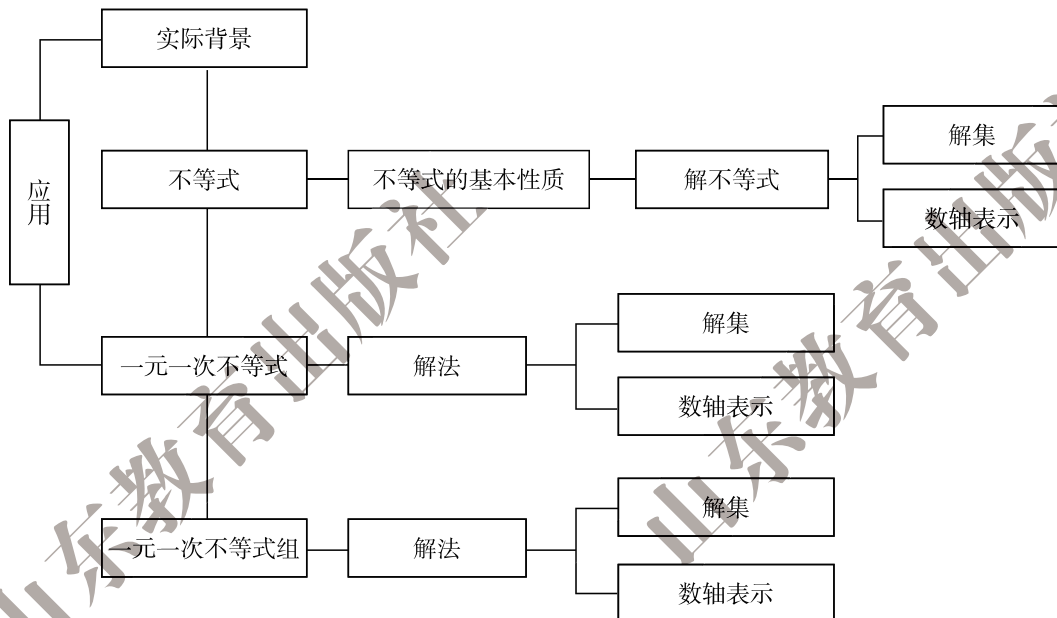
(4) $\begin{cases} 2x+3 \leq 5, \\ 3x-2 \geq 4. \end{cases}$

5. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} - \frac{5x+1}{2} \leq 1, \\ 5x-1 < 3(x+1); \end{cases}$

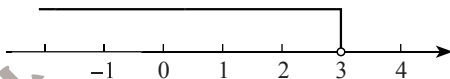
(2) $\begin{cases} 2x-7 < 3(x-1), \\ \frac{4}{3}x+3 \geq 1 - \frac{2}{3}x. \end{cases}$

下面是一个可供参考的本章知识结构图.



下面的典型例题供参考.

例1 一个不等式的解集如图所示, 则这个不等式的正整数解是 _____.



解: 不等式的解集为 $x < 3$, 故其正整数解为 $x = 1, 2$.

例2 解不等式: $1 - \frac{7x-1}{8} > \frac{3x-2}{4}$, 并对每一步变形加以说明.

解: $8 - (7x-1) > 2(3x-2)$ (两边同乘 8, 不等号方向不变),

$$8 - 7x + 1 > 6x - 4 \text{ (去括号)},$$

$$-7x + 9 > 6x - 4 \text{ (合并同类项)},$$

$$-7x - 6x > -4 - 9 \text{ (移项)},$$

$$-13x > -13 \text{ (合并同类项)},$$

$$x < 1 \text{ (两边同除以 } -13, \text{ 不等号改变方向)}.$$

例3 某商品原价 50 元, 如果降价 $x\%$ 后仍不低于 40 元, 那么 x 的取值范围为 _____.

解: 根据题意, 得 $50(1 - x\%) \geq 40$. 解得 $x \leq 20$.

又因为 $x > 0$, 所以 $0 < x \leq 20$.

例4 已知三角形三边长分别为 3, $1 - 2a$, 8, 试求 a 的取值范围.

解: 根据题意, 得 $8 - 3 < 1 - 2a < 8 + 3$.

解得 $-5 < a < -2$.

例5 如果 $2m$, m , $1 - m$ 这三个实数在数轴上所对应的点从左到右依次排列, 那么 m

的取值范围是().

解: 根据题意, 得 $2m < m < 1 - m$.

解得 $m < 0$,

$$m < \frac{1}{2}.$$

所以 m 的取值范围是 $m < 0$.

复习题

1. (1) $x + 1 < 0$; (2) $x^2 \geq 0$; (3) $2x - 3 < 0$; (4) $10 \leq 5a - 3 \leq 20$.

2. $a > 0$, $a < 0$.

3. (1) $x < -2$; (2) $x > -1$ (3) $x < -12$; (4) $x \geq 4$;

(5) $x \leq -2$; (6) $x > 6$; (7) $x < -2$; (8) $x > -\frac{7}{16}$.

数轴表示略.

4. (1) $-3 < x < \frac{5}{2}$; (2) $2 < x < 15$ (3) $x < -1$; (4) 无解.

5. (1) $-1 \leq x < 2$; (2) $x \geq -1$.

6. 已知函数 $y=3x+5$.

(1) 当 x 取何值时, $y>0$?

(2) 当 x 取何值时, $y=0$?

(3) 当 x 取何值时, $y<0$?

7. 求不等式 $5(x-2) \leq 28+2x$ 的正整数解.

数学理解

8. 判断正误:

(1) 由 $2a>3$, 得 $a>\frac{3}{2}$;

()

(2) 由 $2-a<0$, 得 $2<a$;

()

(3) 由 $a<b$, 得 $2a<2b$;

()

(4) 由 $a>b$, 得 $a+m>b+m$;

()

(5) 由 $a>b$, 得 $-3a>-3b$;

()

(6) 由 $-\frac{1}{2}>-1$, 得 $-\frac{a}{2}>-a$.

()

9. a, b 两个实数在数轴上的对应点如图所示:



(第9题)

用“ $<$ ”或“ $>$ ”填空:

(1) a $\underline{\hspace{1cm}}$ b ;

(2) $|a|$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $|b|$;

(3) $a+b$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ;

(4) $a-b$ $\underline{\hspace{1cm}}$ 0 ;

(5) $a+b$ $\underline{\hspace{1cm}}$ $a-b$;

(6) ab $\underline{\hspace{1cm}}$ a .

※10. 如果不等式组 $\begin{cases} x+8 < 4x-1, \\ x > m \end{cases}$ 的解集是 $x>3$, 那么 m 的取值范围是 ().

(A) $m \geq 3$

(B) $m \leq 3$

(C) $m = 3$

(D) $m < 3$

问题解决

11. 暑假期间, 两名家长计划带领若干名学生去旅游, 他们联系了报价均为每人 500 元的两家旅行社. 经协商, 甲旅行社的优惠条件是: 两名家长全额收费, 学生都按七折收费; 乙旅行社的优惠条件是: 家长、学生都按八折收费. 假设这两位家长带领 x 名学生去旅游, 他们选择哪家旅行社更优惠?

12. 某大型超市从生产基地购进一批水果, 运输过程中质量损失 5%, 假设不计超市其他费用.

11. 当只有 4 名学生时, 甲、乙两家旅行社收费一样, 选择哪一家都可以; 当多于 4 名学生时, 选择甲旅行社; 当少于 4 名学生时, 选择乙旅行社.

提示: 设甲旅行社收费 y_1 元, 乙旅行社收费 y_2 元, 根据题意, 得

$$y_1 = 500 \times 2 + (500 \times \frac{70}{100})x, \text{ 即}$$

$$y_1 = 350x + 1000;$$

$$y_2 = (500 \times \frac{80}{100}) \cdot (x+2), \text{ 即}$$

$$y_2 = 400x + 800.$$

12. (1) 设超市购进这批水果的总量为 p kg, 每千克进价为 q 元, 则最终销售额为

$$p(1-5\%) \cdot q(1+5\%) = pq[1-(5\%)^2] \text{ (元)}.$$

因为 $pq[1-(5\%)^2] < pq$, 所以超市亏本.

(2) 设水果的售价应提高 $x\%$, 根据题意, 得

$$p(1-5\%) \cdot q(1+x\%) \geq pq(1+20\%).$$

解得 $x \geq 26.4$.

注意: 第(2)题在取近似数时应采用收尾法, 即根据精确度的要求, 去掉多余部分的数字后, 在保留部分的最后一位数上加 1.

(1) 如果超市在进价的基础上提高 5% 作为售价, 那么请你通过计算说明超市是否亏本;

(2) 如果超市至少要获得 20% 的利润, 那么这种水果的售价最低应提高百分之几? (结果精确到 0.1%)

13. 已知关于 x 的方程 $3x+a=x-7$ 的根是正数, 求实数 a 的取值范围.

14. 某工厂要招聘 A, B 两个工种的工人 150 人, A, B 两个工种的工人的月工资分别为 1 500 元和 3 000 元. 现要求 B 工种的人数不少于 A 工种人数的 2 倍, 那么招聘 A 工种工人多少人时, 可使每月所付的工资最少?

联系拓广

15. (1) 用 “>” “<” 或 “=” 填空:

$$5^2+3^2 \quad 2 \times 5 \times 3;$$

$$3^2+3^2 \quad 2 \times 3 \times 3;$$

$$(-3)^2+2^2 \quad 2 \times (-3) \times 2;$$

$$(-4)^2+(-4)^2 \quad 2 \times (-4) \times (-4).$$

(2) 观察以上各式, 你发现它们有什么规律吗? 你能用一个含有字母 a, b 的式子表示上述规律吗? 再换几个数试一试.

※(3) 运用你所学的知识说明你发现的规律的正确性.

13. $a < -7$.

提示: 解方程 $3x+a=x-7$, 得 $x = \frac{-a-7}{2}$.

根据题意, 得 $\frac{-a-7}{2} > 0$.

14. 当招聘 A 工种工人 50 人时, 可使每月所付工资最少.

提示: 设招聘 A 工种工人 x 人, 则招聘 B 工种工人 $(150-x)$ 人, 根据题意, 得 $150-x \geq 2x$.

15. (1) $>$, $=$, $>$, $=$;

(2) 任意两个数的平方和大于或等于这两个数乘积的 2 倍, 即 $a^2+b^2 \geq 2ab$;

(3) 因为 $(a-b)^2 \geq 0$, 即 $a^2+b^2-2ab \geq 0$, 所以 $a^2+b^2 \geq 2ab$.

附录 典型案例评析

一元一次不等式与一次函数（第1课时）

设计：北京市第五十五中学 张一樵

评析：首都师范大学 王瑞霖

一、教学目标

1. 理解一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的关系，掌握用函数的观点看方程与不等式的方法.
2. 能用画函数图象的方法解释一元一次方程的解与一元一次不等式解集.
3. 在数学活动中，初步建立函数与方程的联系，做到“动心”；能对所发现的数学结论作出合理解释，做到“动脑”；利用函数观点正确解释代数问题的几何背景，做到“动手”；感知数形结合的思想，发展抽象思维，做到“动情”.
4. 从不同角度寻求解决问题的方法，尝试评价不同方法之间的差异.
5. 在独立思考的基础上，敢于发表自己的观点，尊重与理解他人的见解，能从交流中获益.

二、教学重点和难点

教学重点：一元一次不等式、一元一次方程与一次函数之间的内在联系.

教学难点：用函数观点看一元一次方程与一元一次不等式.

三、教学过程

1. 探索新知

活动内容：探究一次函数与一元一次方程、一元一次不等式之间的关系.

活动过程：教师提出问题，学生思考作答.

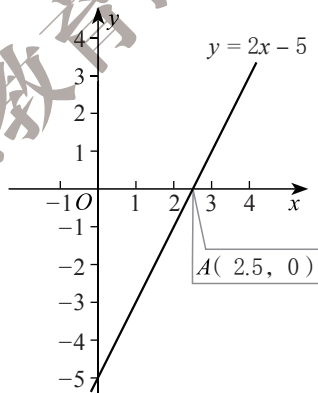
问题：由 $y = 2x - 5$ 想到了什么？

图象与 x 轴交点 $(\frac{5}{2}, 0)$ 的意义是什么？

何时 $2x - 5 = 0$ ？何时 $2x - 5 > 0$ ？何时 $2x - 5 < 0$ ？

教师梳理学生答案，并结合这一具体例子渗透一次函数与一元一次方程、一元一次不等式的关系.

活动目的：从学生熟悉的问题入手，激活学生已有知识，建立不等式、方程与函数之间的联系.



活动内容：进一步结合 $y = -2x - 5$ 探究一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的关系.

活动过程：教师提出问题，学生思考交流.

问题：如果 $y = -2x - 5$ ，那么当 x 取何值时， $y < 0$ ？当 x 取何值时， $y > 0$ ？你是怎样求解的？与同伴交流.

学生独立尝试解决问题，继而讨论交流.

活动目的：经历从一次函数到一元一次不等式的变化过程.

活动内容：提出新的问题.

活动过程：对于 $y = -2x - 5$ ，何时 $y = 1$ ？你可以用多种方法解释这个问题吗？何时 $y > 1$ ？何时 $y < 1$ ？与同伴交流.

活动目的：让学生感受到一次函数与一元一次方程之间在“数”与“形”两个方面的关系，进一步认识一次函数与一元一次方程之间的关系. 运用从特殊到一般的思想方法，培养学生探究问题的能力.

2. 举一反三

活动内容：请学生以小组为单位，自己提出一组问题，自己进行解答.

活动过程：以小组为单位，两个学生合作设置一次方程或一次不等式，并提出问题，其他学生找到对应的一次函数，画出图象解决问题.

学生独立思考后，以小组为单位交流探索，集体解决问题. 学生举出具体的一元一次方程的例子，师生共同探究它们是否可以从函数的观点加以研究. 教师可采用几何画板画函数图象进行验证.

学生在讨论中表现得十分活跃，设计的方程或不等式都很有代表性，有不少可以用多种方式加以理解. 如解不等式 $2x - 4 \geq 0$ ，既可以画出一一次函数 $y = 2x - 4$ 的图象，也可以借助一次函数 $y = 2x$ 与直线 $y = 4$ 的交点来研究. 归纳这些解法，分别从“数”与“形”两方面得出相同的结果.

活动目的：以半开放性任务的形式让不同层次的学生都可以获得对数学思想的理解，小组合作的过程可以增进学生的交流能力和协作能力，对激发学生的学习积极性有显著效果.

3. 归纳新知

活动内容：归纳一次函数 $y = kx + b$ 与一元一次方程 $kx + b = 0$ (k, b 为常数， $k \neq 0$) 及一元一次不等式 $kx + b > 0$ (k, b 为常数， $k \neq 0$) 之间的关系.

活动过程：在前面几个环节的基础上，将几个问题探究得到的结论推广为一般性结论.

解方程 $kx + b = 0$ (不妨设 k 为正数)，也就是求当 x 为何值时函数 $y = kx + b$ 的值为 0

确定直线 $y = kx + b$ 与 x 轴交点的横坐标 x_0 ，这时不等式 $kx + b > 0$ 的解集为 $x > x_0$

活动目的：揭示函数所具有的一般性，体会函数对方程和不等式的统领作用.

4. 应用巩固

活动内容：

1. 用图象解决问题

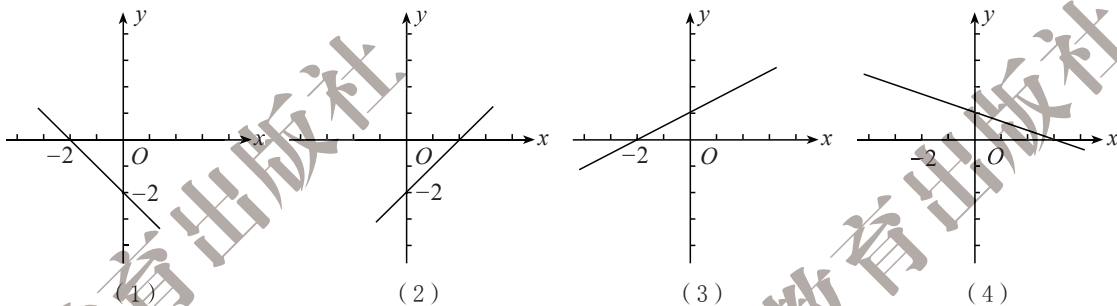
兄弟俩赛跑，哥哥先让弟弟跑 9 m，然后自己才开始跑. 已知弟弟每秒跑 3 m，哥哥每秒跑 4 m. 请根据已知条件列出函数关系式，画出函数图象，观察图象回答下列问题：

- (1) 何时哥哥追上弟弟？
- (2) 何时弟弟跑在哥哥前面？
- (3) 何时哥哥跑在弟弟前面？
- (4) 谁先跑过 20 m？谁先跑过 100 m？
- (5) 你还能提出其他问题吗？与同伴交流.

活动过程：呈现问题，教师提问，板演用一元一次方程解决的解题过程. 启发学生用函数方法来解决这个问题，学生在学案上作答.

活动目的：在问题解决过程中，教师要起到引导作用，适时指出学生探究过程中存在的问题，对多样的解法要充分鼓励，并引导学生用图象分析问题. 学生对第 (5) 题可以提出很丰富的想法，课堂上要通过师生交流、生生交流加深对各种方法的理解.

2. 练习：已知不等式 $ax + b < 0$ 的解集是 $x < -2$ ，下列哪个图象有可能是直线 $y = ax + b$ ？



5. 小结

通过这节课的学习，你对一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的关系有了什么新的了解？

6. 布置作业

略.

四、案例评析

本课是一元一次不等式与一次函数关系的第 1 课时，教科书中安排了问题情境、想一想和做一做，张老师将最开始学生探究一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系

部分充分放大, 给学生足够的空间思考和分析问题. 我们可以就此内容作一些探讨.

1. 一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系在数与代数领域中处于什么样的地位?

函数、方程、不等式都是刻画现实世界中量与量之间关系的重要模型, 它们可以从数与形等不同角度解释事物发展变化的规律. 从整体上认识不等式, 感受函数、方程、不等式的作用对学生在数与代数部分的学习有重要意义.

在学习了一元一次方程、二元一次方程组、一次函数之后, 本章又学习了一元一次不等式, 学生对这些以线性运算为基础的数学模型有了较为完整的认识, 他们有足够的知识储备和认知能力来探讨这些模型之间的关系. 此部分内容的处理, 更多的是融合数与形之间的联系, 没有必要在方程、不等式的数量或形式上设置过多的难度. 用图象法求一元一次不等式的解集的问题, 更多的关注点不在于解是什么, 重要的是让学生认识到一次函数图象与 x 轴交点的意义, 体会模型转化的过程. 建议教师在教学中设置贴近学生生活的实例, 以便帮助学生找到问题的突破口, 建立合理的数学模型, 理解函数图象交点的实际意义, 优选方法解决问题.

2. 一元一次方程、一元一次不等式与一次函数的关系对于学生来讲难在哪里?

通过函数图象找到对应方程的解、对应不等式的解集, 这对学生来说不存在很大困难. 这部分内容最大的难点在于学生能否站在一定的高度认识一元一次方程、一元一次不等式与一次函数之间的联系, 从整体上认识问题的本质. 建议教师在教学中首先从理解一次函数图象与 x 轴交点的意义入手, 不断生成对于 x 轴上方部分、 x 轴下方部分意义的认识, 巩固了这部分的理解之后再进一步讨论图象与直线 $y = 1$ 相交的问题. 教师所举示例可以遵循先特殊化、简单化, 再一般化、复杂化的方式, 逐步深入加以归纳.

3. 本节课的教学亮点对于数与代数领域的相关内容有何借鉴?

第二个活动“举一反三”是本节课设计的亮点之一. 在全班一起研究了 $y = 2x - 5$ 与 $y = -2x - 5$ 的图象与相应方程、不等式之间的关系后, 教师放手让学生自己进行探究, 采用分组讨论的方式, 一位学生出题, 全组学生一起作答.

学生面对出题这一任务, 一定要对相关问题有较全面的认识, 才能保证所出题目的正确性. 让学生出题确实是对学生非常好的锻炼; 全组学生共同研讨不同解法及其优选是很有意义的. 分组之后, 各组所出题目一定并不相同, 解决问题时所用的方法也不尽相同, 教师可以比较选择, 将有代表性的典型问题在全班交流分析.

在数与代数领域的相关内容教学中, 教师可以依据情况选择类似的方式进行教学, 给学生一定条件限制下的自主空间, 在对问题的充分理解基础上自己出题、自己解决. 这一过程可以有效地发展学生提出问题、分析问题及合作交流的能力, 不失为一种有益的尝试.

综合与实践 生活中的“一次模型”

一、教学目标

1. 经历用数学的眼光发现现实生活中的数学问题，尝试提出问题，并加以解决的全过程，体会模型思想，发展应用意识，提高实践能力，了解数学的价值。
2. 综合运用一元一次不等式与一元一次方程、一次函数的相关知识解决问题，体会三者之间的内在联系。
3. 会反思参与活动的全过程，将研究的过程和结果形成报告，并能进行交流，进一步积累数学活动经验。

二、设计思路

到目前为止，学生已经学习了一元一次不等式、一元一次方程与一次函数，积累了一定的知识基础和活动经验，也发现了它们彼此之间的联系，初步感受到这三个“一次模型”的广泛应用。本综合与实践是以探索一元一次不等式与一元一次方程、一次函数的综合应用为主题的实践活动，其主要价值体现在两个方面：第一，可以使学生会一元一次不等式与一元一次方程、一次函数之间的内在联系，初步形成对数学知识系统性的认识；第二，通过调查活动使学生充分认识数学知识在现实生活中的广泛应用，增强学生的应用意识，并在这一过程中发展学生的抽象能力和应用能力。

考虑到学生已进入七年级下学期的学习，他们在之前已经经历了一定的综合与实践活动，积累了不少综合与实践活动的经验，因此本综合与实践以一种新的形式呈现。具体来说，教科书给出的任务比较宽泛，没有给定的背景，没有具体的安排，只是给出了一个原始的问题，规定了一个大的方向：要求将一元一次方程、一元一次不等式和一次函数集中融入一个问题情境，至于具体研究哪些问题、如何研究等完全由学生自主选择。这样设计，可以保证学生学习的自主性、选择性和学习结论的开放性，给学生提供了发现问题、提出问题的机会，有助于发展学生的应用意识和创新意识。

当然，对多数学生来说，从事这样开放性比较强的综合与实践活动的经验可能还有些不足，为此教科书首先对拟定方案环节进行了方向性的指导，然后对研究报告提出了必要的内容要求。教学时，教师可根据学生从事综合与实践活动的经验与水平状况进行更有针对性的指导。

三、教学建议

具体教学时，建议安排 2 课时。第 1 课时引领学生回顾总结，发现运用一元一次不等式、一元一次方程与一次函数解决的一些实际问题。在此基础上，学生依据不同的学习背景选择问题情境，小组讨论确定研究主题，拟定解决问题的方案，研究分析需要获取的有效数据。第 2 课时进行交流评析。

在问题的求解过程中，教师要引导学生切身体会并探究三者之间的内在联系，建立数

学模型并求解；通过小组汇报及师生的交流与评析，引导学生反思自己的调查过程与研究结果，要求学生提出进一步修正与完善的意见，并提交研究报告。

在实际教学过程中，可能会有学生面对这样一个较为宽泛的课题，无法确定所要研究的对象，或者虽然确定了问题情境，但各个量之间的关系较为复杂，因此不能按照课题的要求提出解决方案。这时，需要教师依据学生的学习水平，给予恰当的帮助，在数学模型的建立，方程、不等式、函数关系的构造等方面，可以让不同认知水平及能力层次的学生都经历“问题情境—建立模型—求解—解释与应用”的研究过程。在深度上，不同认知层次的学生可以选择不同的问题情境，可以不同程度地融合数学知识，让不同的学生在数学上得到不同的发展。学生通过经历这样的数学活动，体会数学学习不仅仅是做习题，而且要学会用数学的视角观察现实生活中的有关现象，提出相应的数学问题，分析并解决一定的现实问题。必要时，教师可以提供一些背景，提出研究方向，给出一些具体的问题等。

四、评价建议

首先，本综合与实践活动旨在让学生经历发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的全过程，增强他们发现和提出问题、分析和解决问题的能力，因此学生在这—过程中的表现状况应成为评价的重心。例如，要关注学生如何发现问题，如何选择适合自己完成的问题，如何把实际问题变成数学问题，如何设计解决问题的方案，如何选择合作伙伴，如何有效地呈现研究成果以便让别人体会自己成果的价值等。

其次，本综合与实践活动需要学生从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果并讨论结果的意义。这些正是模型思想的具体体现。教学时应关注学生在相关环节中的表现，并据此评价学生对模型思想的领悟水平。

由于本综合与实践比较开放，因此教学评价会有一定难度。建议评价结果采用四个等级：A、B、C、D，其分别对应：优秀、良好、中等、基本合格。一般情况，尽量不给予不合格的评价，除非其与D级水平有明显差异。以下是评价等级标准描述，供参考。

D——仅仅选定了一个较为简单的课题开展研究，并给出了正确、合理化解答，问题本身、求解过程没有综合运用三个“一次模型”；或者虽然提出了一个较为合适的研究问题，但没有提供完整的求解思路、框架、步骤，以及确定的操作程序和明确分工。

提交的研究报告中仅仅阐述了部分课题活动过程，但存在一些明显的表述问题，如结构不完整、一些语言表述不准确、使用了不当的数学语言或符号等；没有对课题活动进行反思的意识。

C——能够基本准确地提出与一元一次不等式、一元一次方程、一次函数相关的研究课题，能将一元一次不等式、一元一次方程与一次函数集中融入一个实际问题，并从中提取有用的信息，构建正确的数学模型，综合运用一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的知识求解；小组合作制订正确、可行的研究方案，包括解决问题的基本思路、基本策略、活动框架、具体操作和实施的步骤、必要的人员分工和需要收集的资料等，而且能够

对方案在数学方面的正确性作必要的说明.

提交的研究报告结构基本合理,对活动过程的描述基本正确,可读性一般;但内容至少包括:选择的问题情境、获得数据的过程、建立的数学模型、求解过程、解释与应用等几方面;结合实际问题情境,分类写出多个函数关系,并运用不等式或方程确定函数关系成立的条件,再将所有可能的解用图象表示;能较为正确地使用一些数学语言、符号、图象等进行解释和验证;有对研究活动的过程、方法、结果进行反思的意识,对活动过程中出现的意外情况作必要的处理,包括改变方法、调整方案等.

B——能将一元一次不等式、一元一次方程与一次函数集中融入一个实际问题,并从中提取有用的信息,构建正确的数学模型,综合运用一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的知识求解;小组合作制订正确、可行的研究方案,包括解决问题的基本思路、基本策略、活动框架、具体操作和实施的步骤、必要的人员分工和需要收集的资料等,而且能够对方案在数学方面的正确性作必要的说明.

提交的研究报告结构合理,对活动过程的描述清晰、准确,具备良好的可读性和可交流性;内容应包括:背景问题是如何选取的,问题的哪些方面涉及三个“一次模型”的知识,小组中各个成员分别承担的具体职责,完成了方案的基本步骤,较为明确、深刻地运用一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的知识对已选定的实际问题进行分析,正确地使用了必要而恰当的数学语言、符号、图象等进行解释和验证,方法简洁、合理、多样化,涉及归纳、类比、数学化、推理等数学思想方法.

能够完成预设方案中的基本步骤,如能够获得解决问题所需的数据,对数据做必要的处理,合理运用与建立三个“一次模型”,并获得正确的研究结果;提供解释结果正确性的论述过程.

能对整个课题活动的过程、方法、结果进行反思,能够对活动过程中出现的意外情况作合适的处理,包括改变方法、调整方案等.

A——在B级基础上,具备下列表现中的2个方面:

除能够综合运用一元一次不等式、一元一次方程与一次函数的知识外,还能创造性灵活应用其他相关知识或方法于解决问题的过程中;

能够提出富有创意的解决问题的思路;

能够对研究的过程、方法、结果进行较为深刻的反思;在此基础上进一步发现一元一次不等式、一元一次方程与一次函数在同一问题中存在的关系和不同意义,将所获得的结论进行实质性推广或比较准确地描述不同方法的优劣等;

能够进一步提出更一般的三个“一次模型”的相关问题.

综合与实践

生活中的“一次模型”

[1] 你了解一元一次不等式、一元一次方程和一次函数在现实情境中的应用吗？选择你感兴趣的话题，小组合作展开调查，利用得到的数据构造一个可以综合运用这些知识解决的问题，并尝试解决它。

议一议

你们准备研究的主题是什么？研究的具体问题是什么？研究的方案是什么？

包括：小组成员的分工，收集数据的方式，以及可能遇到的困难等。

做一做

(1) 根据小组研究的问题和所得到的数据，构造相应的一元一次方程、一元一次不等式或一次函数尝试解决这些问题。

(2) 撰写研究报告，其中至少应包括：所选择的问题情境、获得数据的过程、建立的数学模型、求解过程、解释与应用等。

议一议

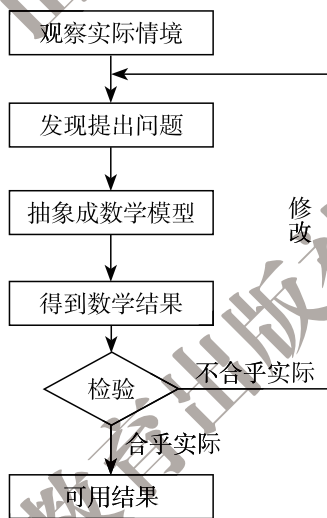
交流各组的研究报告，分享彼此的研究经验，并提出希望进一步研究的问题。

习题

1. 根据小组之间的交流活动，进一步开展研究，完善小组的研究报告。
2. 写一篇短文，谈谈你在本次活动中的感受和体会。

本综合与实践活动的一个重要意图是培养学生的模型思想。模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果并讨论结果的意义。

数学建模就是通过建立模型的方法来求得问题解决的数学活动过程。这一过程可以用下列框图表示：



[1] 教科书首先提出了本综合与实践活动的研究任务，这一任务比较宽泛。教学时，可以由学生经小组讨论形成需要解决的具体问题，这正是下面“议一议”的设计意图。

议一议

鼓励学生分组讨论各自需要研究的具体问题。建议教师首先交待清楚活动目的，提出活动要求；然后由学生自由组成研究小组（4~6人为一组），自荐组长；最后由小组确定研究主题，拟定研究方案，包括小组成员的分工、收集数据的方式，以及可能遇到的困难等。

由于教科书提出的研究任务比较宽泛, 因此学生在选择研究主题时可能会遇到困难, 即使确定了主题, 也可能会感到现实问题比较复杂, 无从下手. 所以, 在具体教学过程中, 教师应根据学生的实际情况给予必要的指导与帮助. 对于研究主题, 教师可以结合当地实际给学生一些提示, 如募捐问题、学校用电量的合理分配问题、家庭理财问题. 指导学生不要选择涉及因素过多、变量关系非“一次”的复杂问题情境.

确定主题后, 还需要拟定研究的具体问题和研究的具体方案.

以下列出一些研究主题和研究问题, 供参考.

主题一: 探索出租车如何计价

1. 日间出租车价与里程数之间的函数关系.
2. 夜间出租车价与里程数之间的函数关系.
3. 当遇到红灯或堵车时的计价情况.

主题二: 探索商场的促销现象

节假日商场经常打出打折的牌子, 在各种以打折名义进行的促销活动中, 如何选择最实惠的商品是大多数人常常面临的问题. 调查学校或居住小区附近某一商场的促销方式, 列出相应的方程、函数或不等关系并作出分析, 用你得到的结论指导周围的人理性消费.

主题三: 关于教育支出的调查

1. 计算一下自己从现在起到参加工作, 总共需要多少教育资金.
2. 考虑你如何支付这些费用, 帮家长写一个储蓄计划.
3. 用不等式来表示你从各种渠道所能储蓄的钱的最低数量.
4. 将你的调查与同学交流一下, 让大家看看你的调查是否可行. 如果可能, 请他们提供改进的建议.

做一做

实际教学时, 本环节可以以“长作业”的形式出现. 将课堂内的数学活动延伸到课堂外, 让学生经历数据收集、查阅资料、独立思考、合作交流、实践检验、推理论证等多种形式的活动.

(1) 确定研究主题和研究的具体问题后, 小组成员分工采访有关人员或进行调查, 收集所需数据, 确定数量关系; 在此基础上小组合作, 用所收集的数据和已确定的数量关系构造一个或几个用一元一次方程、一元一次不等式、一次函数解决的问题, 即把现实问题转化为数学问题, 求解并对求得的解作出合理解释.

(2) 对于学生的研究报告, 不仅要关注结果, 而且更要关注他们积累活动经验、展现思考历程、交流收获体会、激发创造潜能的过程. 对于研究报告的内容, 教师可提出适当的要求, 如要包括选择的问题情境、获得数据的过程、建立的数学模型、求解过程、解释与应用等; 结合实际情境, 分类写出多个函数关系, 并运用不等式或方程确定函数关系成立的条件, 再将所有可能的解用图象表示等.

议一议

在各小组完成研究报告后,进行班级汇报与交流.教学时,可要求每个小组围绕一个主题进行汇报交流,在此过程中教师要注意倾听和思考,关注学生对整个活动过程的反思,并及时依据交流内容提出相关问题引导学生讨论.例如,可以引导学生分析哪些案例从数学角度看是相同的,哪些案例从数学角度看是不同的,让学生体会数学模型的内涵;又如,可以引导学生关注各小组所研究的内容,他们为什么会想到这些问题,是怎么解决的,在解决过程中是如何运用一元一次方程、一元一次不等式和一次函数知识的,这些问题还能做哪些推广和改进

习题

反思是学生积累数学活动经验和提升解决问题能力的重要方式,通过对其他小组成果的借鉴和对自己小组成果的反思,将本小组的研究报告进行修改整理.教学时,可以以墙报或小论文集等形式展示学生的研究成果,以及学生个人的活动感想.

附录 典型案例评析

生活中的“一次模型”

提供者：江苏省南京市第二十九中学 刘黔昉

评析：河北省石家庄市教育科学研究所 张惠英

研究主题：家庭用电成本问题.

案例说明：本案例以追求家庭最低用电成本为主线，从家庭峰谷用电量的实际数据、峰谷电价差异，到家用电器功率以及用电时间的调查、整理分析，展示小组研究课题的意义、研究方向的正确性、研究方法的合理性，以及研究结论的实用性. 当然，教师还可以指导学生类似地研究水表费用和煤气表费用的问题.

小组成员：严昕、肖晴、苏玮奕、冯艳蕾、戈绍男、路皓.

引言

今天，我们小组正在路皓家讨论数学活动. 突然，一阵敲门声打断了我们的讨论，原来是小区的物业管理人员来查电表. 一位同学建议：为什么不以小区内的用电方案作为我们的活动主题呢？

收集数据

南京市现有两种用电收费方法：

分时电表普通电表		
峰时（8:00—21:00）	谷时（21:00 到次日 8:00）	
电价 0.55 元 / 千瓦·时	电价 0.35 元 / 千瓦·时	电价 0.52 元 / 千瓦·时

路皓家所在的小区用的电表都换成了分时电表.

问题：家庭使用分时电表是不是一定比普通电表合算呢？

解决问题

设某家庭某月用电总量为 $a \text{ kW} \cdot \text{h}$ (a 为常数)，其中谷时用电 $x \text{ kW} \cdot \text{h}$ ，则峰时用电 $(a-x) \text{ kW} \cdot \text{h}$ ，分时计价时总价为 y_1 元，普通计价时总价为 y_2 元.

函数关系式为： $y_1 = 0.35x + 0.55(a-x)$ ， $y_2 = 0.52a$.1. 当 $0.35x + 0.55(a-x) = 0.52a$ 时，解得 $x = 0.15a$. 此时， $y_1 = y_2$.

说明：如果一个家庭把每月的用电量的 15% 放在谷时使用，那么两种方法费用相等.

2. 当 $0.35x + 0.55(a-x) > 0.52a$ 时，解不等式，得 $x < 0.15a$. 此时， $y_1 > y_2$.

说明：如果一个家庭每月在谷时的用电量小于每月总用电量的 15%，那么使用普通电表合算.

3. 当 $0.35x + 0.55(a - x) < 0.52a$ 时, 解不等式, 得 $x > 0.15a$. 此时, $y_1 < y_2$.

说明: 如果一个家庭每月在谷时的用电量大于每月总用电量的 15%, 那么使用分时电表合算.

路皓家最近两个月用电的数据:

谷时用电量 / $\text{kW} \cdot \text{h}$	峰时用电量 / $\text{kW} \cdot \text{h}$	合计费用 / 元
181	239	$0.35 \times 181 + 0.55 \times 239 = 194.80$

根据上表, 我们进行了计算:

$$x = 181, a = 181 + 239 = 420.$$

$$x \div a = 181 \div 420 \approx 0.43.$$

$$0.43 > 0.15,$$

所以用分时电表是合算的.

当然, 仅仅根据一个月的数据来判断是远远不够的, 需收集多个月的数据来判断. 这里由于时间较短, 无法收集齐全.

深入探究

根据分时电表的特点, 除了日常必须按时进行的一些用电外, 如果能将可调用电时间控制在 21:00 到次日 8:00 (谷时), 使 $\frac{x}{a}$ 的值尽可能大, 就可以最大限度地节省电费. 对此, 我们进行了归纳和分析:

部分家庭每月电费明细表

电器名称	功率 / W	时间 / (时 / 天)	用电量 / $\text{kW} \cdot \text{h}$	谷时电费 / 元	峰时电费 / 元	差额 / 元	时间是否可调
洗衣机	294	1.5	13.23	4.63	7.28	2.65	是
电灯	40	5.0	6.00	2.10	3.30	1.20	否
电水壶	1 800	0.5	27.00	9.45	14.85	5.40	是
电饭煲	500	0.5	7.50	2.63	4.13	1.50	否
电冰箱	140	10.0	42.00	14.70	23.10	8.40	否
电视机	80	6.0	14.40	5.04	7.92	2.88	否
门灯	3	24.0	2.16	0.76	1.19	0.43	否
合计	2 857	47.5	112.29	39.31	61.77	22.46	

注: $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 1\,000 \text{ W} \times 1 \text{ h}$

月用电总量 ($\text{kW} \cdot \text{h}$) = 功率 $\times$ 时间 $\div 1\,000$

根据上表,我们认为,可以将时间可调、功率较大的电器(洗衣机、电水壶等)放在谷时工作,这样就可以充分发挥分时电表的优势,使 $\frac{x}{a}$ 的值尽可能大,就可以最大限度地节省电费.如果家家户户都能这样做的话,必定可以节省一笔不小的开支.

总复习题

教师首先鼓励学生自己回顾本册的学习内容,并与同伴合作完成本册内容框架图,每个小组制成的框架图可以各有特色,但应包括所有的学习重点.

教师还应组织学生交流在本册学习中的收获和不足,培养他们的反思意识.

总复习题

- 整理本学期学过的知识和方法,你能用一张图把它们表示出来吗?与同伴进行交流.
- 在自己经历过的解决问题活动中,选择一个最具有挑战性的问题,写下解决它的过程,包括遇到的困难、克服困难的方法与过程,以及所获得的体会,并解释选择这个问题的原因.
- 通过本学期的数学学习,你有哪些收获?有哪些需要改进的地方?

知识技能

1. 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} 6x-3y=-3, \\ 5x-9y=-35; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2x-5y=-3, \\ 5x-2y=-18; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x-y=-4, \\ 4x-5y=-23; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3m-2n=7, \\ 3m-n=5; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 4x-y=30, \\ x-2y=-10; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 0.3x-y=1, \\ 0.2x-0.5y=19; \end{cases}$$

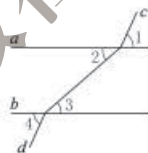
$$(7) \begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1, \\ 3x-4y=2; \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 4x-15y+17=20, \\ 6x-25y-23=-16; \end{cases}$$

$$*(9) \begin{cases} x+y+z=4, \\ 2x-y+z=3, \\ 3x-2y-3z=-5; \end{cases}$$

$$*(10) \begin{cases} 2x-3y+4z=11, \\ 3x+y-2z=3, \\ z=x+y \end{cases}$$

2. 我们知道,光线从空气射入水中会发生折射现象.光线从水射入空气中,同样也会发生折射现象.如图,已知 $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$. 求证: 直线 $c \parallel d$.



(第2题)

$$1. (1) \begin{cases} x=2, \\ y=5; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x=-4, \\ y=-1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=5. \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} m=1, \\ n=-2; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x=10, \\ y=10; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x=370, \\ y=110; \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x=6, \\ y=4; \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} x=-3, \\ y=-1; \end{cases}$$

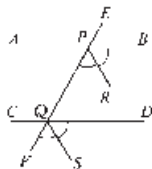
$$(9) \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} x=2, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$$

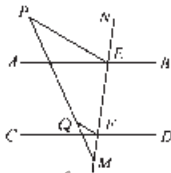
2. 提示: 延长 c , 使之与 b 相交. 先证 $a \parallel b$, 然后再证 $c \parallel d$.

3. 已知: 如图, 直线 $AB \parallel CD$, 并且被直线 EF 所截, EF 分别交 AB 和 CD 于点 P 和 Q , 射线 PR 和 QS 分别平分 $\angle BPF$ 和 $\angle DQF$.

求证: $\angle BPR = \angle DQS$.



(第3题)



(第4题)

4. 已知: 如图, 直线 $AB \parallel CD$, $\angle AEP = \angle CFQ$.

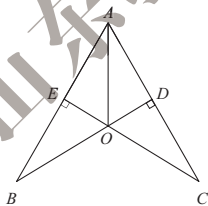
求证: $\angle EPM = \angle FQM$.

5. 如图, 已知 $AB = A_1B$, $A_1C = A_1A_2$, $A_2D = A_2A_3$, $A_3E = A_3A_4$, $\angle B = 20^\circ$, 求 $\angle A_4$ 的度数.

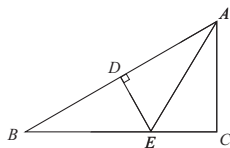
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的度数之比是 $1:2:3$, AB 边上的中线长为 4, 求 AB 的长.

7. 已知: 如图, $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, 垂足分别为点 D , E , BD 与 CE 相交于点 O , AO 平分 $\angle BAC$.

求证: $OB = OC$.



(第7题)



(第8题)

8. 如图, DE 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 的垂直平分线, 分别交 AB 和 BC 于点 D , E , AE 平分 $\angle BAC$. 已知 $\angle B = 30^\circ$, 求 $\angle C$ 的度数.

9. 解下列不等式, 并把它们的解集分别表示在数轴上:

(1) $3x - 2x < 5$;

(2) $x - 6 > 2x$;

(3) $\frac{x}{2} > \frac{x}{3}$;

(4) $2x - 7 > 5 - 2x$;

(5) $\frac{1-3x}{2} > 1-2x$;

(6) $x - \frac{1}{2}(4x-1) \leq 2$;

(7) $\frac{x-1}{2} + 1 \geq \frac{x}{4}$;

(8) $0.01x - 1 \leq 0.02x$.

9. (1) $x < 5$;

(2) $x < -6$;

(3) $x > 0$;

(4) $x > 3$;

(5) $x > 1$;

(6) $x \geq -\frac{3}{2}$;

(7) $x \geq -2$;

(8) $x \geq -100$.

数轴表示略.

3. 提示: 由 $AB \parallel CD$ 得 $\angle BPF = \angle DQF$, 于是 $\angle BPR = \frac{1}{2} \angle BPF = \frac{1}{2} \angle DQF = \angle DQS$.

4. 提示: 由 $AB \parallel CD$ 得 $\angle AEF = \angle CFM$, 再结合 $\angle AEP = \angle CFQ$, 可得 $\angle PEF = \angle QFM$, 从而 $PE \parallel QF$.

5. $\angle A_4 = 10^\circ$.

6. $AB = 8$.

7. 提示: 先证 $\triangle AEO \cong \triangle ADO$ (AAS), 得 $EO = DO$, 再证 $\triangle BEO \cong \triangle CDO$ (ASA).

8. $\angle C = 90^\circ$.

10. (1) 无解;

(2) $x > 4$;

(3) $-1 < x < -\frac{5}{7}$;

(4) $x < -1$;

(5) $0 < x < 1$;

(6) $x \leq 1$.

11. 交点是 $(1, \frac{3}{2})$; 方程组

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

12. 证明: $\because \angle E = 90^\circ$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$$

$$\therefore AB \parallel CD.$$

13. 证明: $\because GE \parallel AD$,

$$\therefore \angle CAD = \angle G, \angle BAD = \angle BFE.$$

$$\because \angle BFE = \angle G,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BAD.$$

10. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 1+2x > 3+x, \\ 5x \leq 4x-1; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 2-x \leq -1, \\ 3 < x-1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 3(x-1) < 4x-2, \\ -\frac{x}{5} > \frac{x+1}{2}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{2x}{3} \leq \frac{-x}{2} + \frac{5}{3}, \\ 3(x-1) < x-5; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3) < 2, \\ \frac{x+2}{2} > \frac{x+3}{3}; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x-3(x-2) \geq 4, \\ \frac{1+2x}{3} \geq x-1; \end{cases}$$

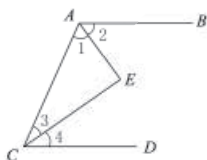
数学理解

11. 在同一直角坐标系内画一次函数 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 和 $y = \frac{3}{2}x$ 的图象. 直线 $y = -\frac{3}{2}x + 3$

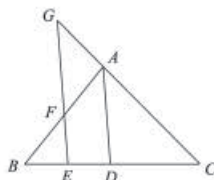
与直线 $y = \frac{3}{2}x$ 的交点是 $(1, \frac{3}{2})$. 你能据此求出方程组 $\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + 3, \\ y = \frac{3}{2}x \end{cases}$ 的解吗?

12. 已知: 如图, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle E = 90^\circ$.

求证: $AB \parallel CD$.



(第12题)



(第13题)

13. 已知: 如图, $GE \parallel AD$, $\angle BFE = \angle G$.

求证: AD 平分 $\angle BAC$.

14. 设计一个转盘, 使得自由转动这个转盘, 指针停在红色区域中的概率为 $\frac{2}{5}$.

15. 请你制作一个均匀的正方体骰子, 使得任意掷一次骰子, 掷出“6”的概率是 $\frac{1}{3}$.

16. 如图, A, B 是平面上的两定点, 在平面上找一点 C , 使 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 且 C 为直角顶点. 这样的点 C 有几个?

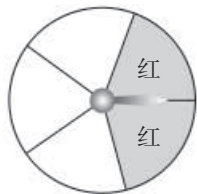
(第16题)

14. 答案不是唯一, 只要合理都要给予鼓励. 例如:

15. 只要立方体有两个面上写有数字“6”即可.

16. (1) 分别过点 A 与 B 在 AB 的同侧作 AB 的垂线, AE 和 BF .

(2) 分别作 $\angle EAB$ 和 $\angle FBA$ 的平分线 AM 和 BN , AM 与 BN 的交点便是所要找的点 C .

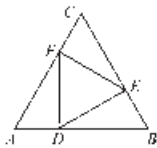


(转盘被等分成5个扇形)

(第14题)

17. 已知：如图，等边三角形 DEF 的顶点分别在等边三角形 ABC 的边上.

求证： $AD=BE=CF$.



(第 17 题)

问题解决

18. 某校有两种类型的学生宿舍 30 间，大的宿舍每间可住 8 人，小的每间可住 5 人. 该校 198 个住宿生恰好住满这 30 间宿舍. 大小宿舍各有多少间？
19. 甲、乙两种商品原来的单价和为 100 元. 因市场变化，甲商品降价 10%，乙商品提价 40%，调价后，两种商品的单价和比原来的单价和提高了 20%. 甲、乙两种商品原来的单价各是多少元？
20. 10 年前，小明妈妈的年龄是小明的 6 倍；10 年后，小明妈妈的年龄是小明的 2 倍. 小明和他妈妈现在的年龄分别是多少？
21. 三个连续自然数的和小于 15，这样的自然数组共有多少？把它们分别写出来.
22. 甲、乙两家旅行社为了吸引更多的顾客，分别推出了赴某地旅游的团体优惠办法. 甲旅行社的优惠办法是：买 4 张全票，其余人按半价优惠；乙旅行社的优惠办法是：一律按原价的 $\frac{3}{4}$ 优惠. 已知这两家旅行社的原价均为每人 100 元，那么随着团体人数的变化，哪家旅行社的收费更优惠？
23. 某地为促进淡水养殖业的发展，决定对淡水鱼的养殖提供政府补贴，以使淡水鱼的价格控制在 6~12 元/千克之间. 据市场调查，如果淡水鱼的市场价格为 a 元/千克，政府补贴为 t 元/千克，那么要使每日市场的淡水鱼供应量与需求量正好相等， t 与 a 应满足关系式 $100(a+t-8)=270-3a$. 为使市场价格不高于 10 元/千克，政府补贴至少应为多少？
24. 某校组织师生春游，若单独租用 45 座客车若干辆，则刚好坐满；若单独租用 60 座客车，则可以少租 1 辆，且余 30 个空座位.
- (1) 求该校参加春游的人数；
 - (2) 该校决定这次春游同时租用这两种车，其中 60 座客车比 45 座客车多租 1 辆，这样要比单独租用一种车辆节省租金. 已知 45 座客车的租金为每辆 250 元，60 座客车的租金为每辆 300 元，请你帮助计算本次春游所需车辆的租金.

联系拓广

25. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $\angle ACB$ 的平分线 CD 交 AB 于点 E ， $\angle BDC=90^\circ$.
- 求证： $CE=2BD$.

19. 甲商品原价 40 元，乙商品原价 60 元.

提示：可设甲商品原价 x 元，乙商品原价 y 元，则有方程组

$$\begin{cases} x+y=100, \\ (1-10\%)x+(1+40\%)y=(1+20\%)\times 100. \end{cases}$$

20. 小明和妈妈现在的年龄分别是 15 岁和 40 岁.

提示：可设小明和妈妈现在的年龄分别是 x 岁和 y 岁，则有方程组

$$\begin{cases} y-10=6(x-10), \\ y+10=2(x+10). \end{cases}$$

21. 共 4 组：0, 1, 2; 1, 2, 3; 2, 3, 4; 3, 4, 5.

17. 提示：证明 $\triangle ADF \cong \triangle BED$
 $\cong \triangle CFE$.

18. 有大宿舍 16 间，小宿舍 14 间.

提示：可设有大宿舍 x 间，小宿舍 y 间，则有方程组

$$\begin{cases} x+y=30, \\ 8x+5y=198. \end{cases}$$

22. 当人数少于 8 人时, 乙旅行社的收费更优惠; 当人数等于 8 人时, 两家旅行社的收费一样; 当人数多于 8 人时, 甲旅行社的收费更优惠.
23. 至少应为 0.4 元.

提示: 由题设, 解得 $a = \frac{1\ 070 - 100t}{103}$, 根据题意, 得

$$6 \leq \frac{1\ 070 - 100t}{103} \leq 10.$$

解得 $0.4 \leq t \leq 4.52$. 此时, 政府补贴 t 至少应为 0.4 元.

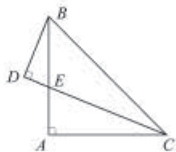
24. (1) 270 人;

(2) 1 400 元.

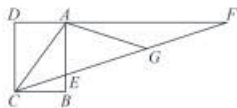
提示: 设本次春游需租 45 座客车 x 辆, 根据题意, 得

$$\begin{cases} 45x + 60(x + 1) \geq 270, \\ 250x + 300(x + 1) \leq 1\ 500. \end{cases}$$

25. 提示: 延长 CA , BD 交于点 F , 证明 $\triangle ACE \cong \triangle ABF$.



(第25题)



(第26题)

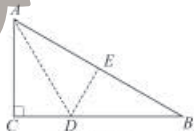
※26. “三等分一个任意角”是数学史上一个著名问题. 今天人们已经知道, 仅用圆规和直尺是不可能作出的. 在探索中, 有人曾利用过如图所示的图形, 其中, $ABCD$ 是长方形, F 是 DA 延长线上一点, G 是 CF 上一点, 并且 $\angle ACG = \angle AGC$, $\angle GAF = \angle GFA$. 你能证明 $\angle ECB = \frac{1}{3} \angle ACB$ 吗?

27. 在如图所示的三角形纸片 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. 按如下步骤可以把这张直角三角形纸片分成三个全等的小直角三角形 (图中虚线表示折痕): ① 先将点 B 对折到点 A ; ② 将对折后的纸片再沿 AD 对折.

(1) 由步骤 ① 可以得到哪些等量关系?

(2) 请证明 $\triangle ACD \cong \triangle AED$;

(3) 按照这种方法能否将任意一个直角三角形分成三个全等的小三角形?



(第27题)

※28. 习题 8.9 第 3 题有结论: 图 (1) 中, $\angle BDC = \angle B + \angle C + \angle A$.

利用上述结论求图 (2) 中五角星五个“角”的和.



(1)

(2)

(第28题)

28. 180° .

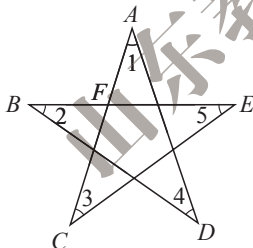
提示: 如图,

$$\angle AFB = \angle 1 + \angle 2 + \angle 4,$$

$$\angle AFB = \angle EFC,$$

$$\angle EFC + \angle 3 + \angle 5 = 180^\circ,$$

$$\text{所以 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ.$$



(第28题)